

RUTA PARA IDENTIFICAR, RECONSTRUIR Y TIPIFICAR ARGUMENTOS MATEMÁTICOS QUE SURGEN EN CLASE DE GEOMETRÍAⁱ

Route to identify, reconstruct, and typify mathematical arguments produced in geometric classrooms.

Camargo, L.^a, Molina, O.^a, Perry, P. y Samper, C.^a

^aUniversidad Pedagógica Nacional

Resumen

Presentamos una ruta analítica para identificar, reconstruir y tipificar argumentos matemáticos que surgen en clases de geometría durante la interacción entre estudiantes o entre profesor y estudiantes en el contexto de resolución de tareas que promueven la argumentación. Es resultado parcial de una investigación en curso relacionada con el diseño de tareas para impulsar el conocimiento didáctico matemático sobre argumentación, de profesores en formación. Ilustramos el uso de la ruta con el análisis de la transcripción de un intercambio comunicativo entre estudiantes universitarios de un curso inicial de geometría plana.

Palabras clave: *argumentación, argumento, ruta analítica, geometría euclidiana, formación de profesores.*

Abstract

We present an analytical route to identify and reconstruct mathematical arguments that arise in geometry classes during interaction between students or between teacher and students in the context of solving open conjecturing problems. It is a partial result of an ongoing investigation related to the design of professional tasks to promote preservice teachers' mathematical didactic knowledge about argumentation. We illustrate the use of the route with the analysis of a transcription of the communicative exchanges between university students of an initial plane geometry course.

Keywords: *argumentation, argument, analytic route, Euclidean geometry, teacher training.*

INTRODUCCIÓN

La argumentación es un asunto que interesa a profesores de matemáticas e investigadores. A profesores porque las directrices curriculares actuales en varios países proponen, como una meta educativa para el área de matemáticas, que los niños y jóvenes aprendan a argumentar (MEN, 2006; NCTM, 2000). Además de considerarse como un aprendizaje escolar esencial, la argumentación se ve como un proceso fundamental en la construcción de conocimiento: los estudiantes aprenden matemáticas al argumentar en actividades que conllevan a la interacción social en clase. A investigadores porque la línea de argumentación y demostración, cuyos orígenes se remontan a las décadas del 80 y 90 del siglo pasado, está vigente y todavía hay muchos asuntos por estudiar (de Sá Ibraim y Justí, 2016; Knipping y Reid, 2019; Lin et al., 2012; Molina, 2019; Stylianides y Ball, 2008).

Pese a los diversos desarrollos de la línea, hace falta material de apoyo para profesionales interesados en identificar y caracterizar argumentos que surgen en interacciones comunicativas en la clase de matemáticas. Cómo proceder para ello, a partir de la transcripción de un intercambio

verbal en el aula, es un asunto que preocupa a la comunidad (Boero et al., 2018; Knipping y Reid, 2015, 2019; Krummheuer, 2015; Larios et al., 2017; Metaxas, 2015).

La investigación que nos ocupa desde 2020 tiene entre sus objetivos diseñar tareas para que estudiantes para profesor de matemáticas aprendan un discurso especializado sobre la argumentación. Es en ese escenario en el que desarrollamos una ruta, fundamentada en nuestra aproximación conceptual de argumento y argumentación matemáticos, para identificar, reconstruir y tipificar argumentos esbozados en una interacción entre estudiantes o estudiantes y profesor, usando la transcripción de una videograbación. El propósito de la ponencia es presentar la ruta y ejemplificar su uso, destacando el potencial que tiene como herramienta formativa e investigativa.

MARCO DE REFERENCIA

Enseguida, presentamos la conceptualización de argumentación y argumento que hemos usado; esta es cercana a lo que Durand-Guerrier et al. (2012) entienden por argumentación y a la interpretación que Knipping y Reid (2019) hacen de la estructura funcional de argumento propuesta por Toulmin. Exponemos también una tipificación de argumentación.

Argumento es una expresión discursiva expositiva, conforme a normas compartidas, que presenta una aserción y razones que la sustentan. La *aserción* se expone de tres maneras: en una proposición (es decir, una oración de la cual puede decirse que es verdadera o falsa) que afirma o niega una idea; en una oración en la que se plantea una postura; o en una acción física realizada con la que se expresa una idea o una postura. De la idea propuesta interesa sustentar su veracidad; de la postura planteada interesa sustentar su aceptabilidad. *Justificación* es un conjunto de razones que sustentan la veracidad o la aceptabilidad de la aserción. Así, una justificación no es un argumento porque no incluye la aserción. Las *razones* se pueden expresar en oraciones (sean o no proposiciones) o acciones. *Argumentación* es un proceso discursivo y sociocultural en el que surgen argumentos.

Argumento simple es un argumento conformado por tres elementosⁱⁱ –dato, aserción, garantía– relacionados funcionalmente así: el dato es una razón que fundamenta la aserción, es evidencia que justifica la aserción; la garantía es una razón que da soporte a la relación entre el dato y la aserción; justifica con un enunciado general por qué el dato sirve como evidencia para apoyar la aserción. Si la garantía no está explícita, hablamos de argumento simple incompleto.

Argumento matemático es un argumento que surge durante alguna actividad relevante en la práctica matemática (i.e. generalizar, visualizar, explorar, representar, clasificar); la aserción versa sobre un objeto matemático (e. g., propiedades o relaciones entre propiedades) y las razones aducidas pueden referirse o no a condiciones de índole matemática. Está asociado a una argumentación acompañada de acciones como generalizar, visualizar, explorar, representar, abstraer, clasificar.

En el proceso de producir un argumento, lo que se infiere y la manera de hacerlo a partir de información con la que se cuenta determina si la argumentación es inductiva, deductiva o abductiva. Describimos someramente los tipos de argumentación. Por extensión y abusando del lenguaje, le asignamos al argumento el mismo nombre del tipo de argumentación de la que surge.

Argumentación inductiva: se hace en el marco de un conjunto referencial. Se inicia con la información de que varios casos comparten otro atributo (además del que comparten por ser elementos del mismo conjunto referencial) determinado empíricamente. Al tomar uno o varios casos del referencial aún no considerados, la argumentación expone que estos también tienen el otro atributo. En el *argumento inductivo*, el dato expresa el hecho de que varios elementos del conjunto comparten un atributo, empíricamente encontrado, diferente al que define al conjunto; la aserción expresa, a manera de inferencia, que al menos otro elemento del conjunto referencial podría tener el otro atributo; la garantía resulta ser el patrón de generalización supuesto (expresión de que todos los elementos del conjunto referencial comparten el segundo atributo) que permite hacer la inferencia.

Argumentación deductiva: se inicia con información que se acepta como verdadera y cuenta como dato; sobre este se aplica, tácita o explícitamente, una garantía considerada válida para inferir una aseveración, la cual se considera, además de válida, necesaria. En el *argumento deductivo*, la aseveración (proposición o idea que resulta de aplicar una regla general a un caso) es el elemento que se puede inferir de manera necesaria a partir de un dato (enunciado en el que se presenta el caso al cual se aplica la regla) y una garantía (la regla general).

Argumentación abductiva: se inicia con una enunciación en la que se expone una aseveración, que se asume como verdadera o aceptable, sobre la cual se opera para inferir un dato o un dato y una garantía, en calidad de posibles y resultado de una exploración teórica o empírica. En el *argumento abductivo*, el dato o el dato y la garantía son los elementos que se infieren a partir de la aseveración.

RUTA PARA IDENTIFICAR, RECONSTRUIR Y TIPIFICAR ARGUMENTOS

Como parte del conocimiento especializado sobre argumento y argumentación que consideramos debería tener un profesor de matemáticas, en nuestra investigación vimos pertinente que ellos cuenten con un procedimiento para identificar argumentos en transcripciones. Dado que no disponíamos de una propuesta de ruta, ajustada a nuestro marco de referencia, para satisfacer el interés citado, nos concentramos en proponer una. Esta se construyó mediante un esfuerzo investigativo cíclico de diseño – experimentación – análisis, tal como es caracterizado por Llinares (2014). La discusión con la comunidad puede ser vista como una forma de triangulación para evaluar su pertinencia.

La ruta consta de seis pasos (Tabla 1). A partir del Paso 4, la ruta puede repetirse varias veces, según el número de argumentos encontrados.

Tabla 1. Propuesta de ruta para identificar y caracterizar argumentos en una transcripción

Paso 1	Paso 2	Paso 3	Paso 4	Paso 5	Paso 6
Delimitar el episodio y darse una idea de la argumentación	Contextualizar el episodio	Relatar la argumentación	Reconstruir el argumento en un fragmento	Determinar el tipo de argumento	Explicitar los elementos básicos del argumento

El *Paso 1* comienza con delimitar el episodio de una transcripciónⁱⁱⁱ en el que se entrevé la ocurrencia de argumentación en torno a un asunto bien determinado; sigue con la lectura completa y cuidadosa de la transcripción con miras a formarse una idea de lo sucedido en la interacción en lo que concierne a la argumentación.

En el *Paso 2* se hace una contextualización, sustancial y sintética, que sirva como introducción del episodio extraído. La contextualización puede aludir, por ejemplo, a la situación o intención que motivó la interacción que constituye el episodio (solución de un problema, justificación de una idea, discusión en torno a algo), o a información específica que se tiene al comenzar el intercambio (una construcción, condiciones dadas en un problema, un resultado previo sobre el que se habla, etc.).

En el *Paso 3* se escribe un relato corto que hace ostensivo lo que se ha interpretado del episodio en relación con la idea panorámica de la argumentación presente en él (e.g., presentación de ideas que sustentan posturas, presentación de acciones para inferir información). Tiene una doble finalidad: dar sentido como un todo a lo leído, seleccionando lo que se considera más relevante, y establecer un referente útil para dilucidar posibles diferencias de interpretación.

En el *Paso 4* se reinicia la lectura del episodio con miras, esta vez, a delimitar el fragmento de transcripción en el que se encuentra el primer argumento, esbozado o explícito en la argumentación. En las intervenciones se identifican con letras consecutivas las frases o expresiones de interés. Para dicho fragmento se escribe una interpretación sintética de lo que sucede en él. Se arma un párrafo

conformado por frases de la transcripción que son clave para reconstruir el argumento incluyendo la letra que las identifica. Se pueden editar frases en aras de dejar el texto lo más limpio y claro posible. Parte de esa edición es usar letra negrilla para destacar palabras que son indicadores de la presencia de una intención justificativa.

Como *Paso 5* se determinan los elementos básicos del argumento y se tipifica. El tipo de argumento depende de la dupla fragmento-síntesis: (i) Si en esta es evidente la intención de inferir algo de unas condiciones iniciales, empírica o teóricamente, se puede vislumbrar la presencia de un argumento inductivo o deductivo. Ejemplos de palabras que pueden ayudar en la identificación de los elementos en estos tipos de argumento se presentan enseguida. Para argumentos deductivos, las frases que le siguen a palabras como “por”, “porque”, “puesto que”, “ya que”, podrían ser garantía o dato; las expresiones que le siguen a palabras como “tenemos”, “dado”, “las condiciones son”, podrían ser dato; las expresiones que le siguen a palabras como “luego”, “por ende”, “entonces”, “se obtiene”, podrían ser la aserción. Para los argumentos inductivos las expresiones “en estos casos pasa que...”, “acá ocurre siempre que...” pueden indicar, respectivamente, tanto el dato como la aserción. (ii) Si en la dupla se evidencia la intención de inferir un dato que probablemente dio lugar a un hecho que se tiene, se puede vislumbrar la presencia de un argumento abductivo. Ejemplos de palabras que pueden ayudar en la identificación de lo que se infiere (dato) en este tipo de argumento son: “debería ser”, “es necesario tener que”, “siempre que”.

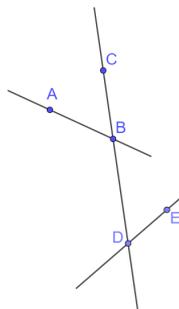
En el *Paso 6* se explicitan los elementos básicos del argumento y se rescriben según la interpretación del analista (en caso de necesidad), siempre referenciando la(s) frase(s) que se usa(n) (para ello sirve la letra con el que se etiqueta la frase). En este punto vale la pena precisar que son usuales los fragmentos en los que no todos los elementos de un argumento se han verbalizado. En este caso, se sugiere acudir a los insumos que permitan inferir el elemento no explícito. La contextualización (*Paso 2*), puede ser uno de tales insumos; por su contenido, puede proveer los datos o la aserción de un argumento. Cuando una garantía no la enuncia quien argumenta, esta usualmente se establece a partir de una mera interpretación; el dato y la aserción identificados se usan para conformar una proposición condicional que se indica como “garantía implícita”.

Cuando la garantía es explícita puede ser enunciada de varias formas, todas ellas equivalentes desde un punto de vista semántico. Así las cosas, se puede enunciar de forma categórica (e.g., el punto de intersección de las mediatrices de dos segmentos cuyos extremos son tres puntos no colineales están también en la mediatriz del tercer segmento que se puede determinar con dichos tres puntos), no categórica (e.g., si están dados un triángulo y las mediatrices de dos de sus lados, entonces la intersección de tales mediatrices pertenece a la mediatriz del tercer lado), con nombres específicos, pero que aluden a objetos genéricos (e.g., si m y n son las mediatrices de los lados AB y BC del triángulo ABC y la intersección de las rectas m y n es el punto T , entonces T pertenece a la mediatriz del segmento AC) o con el nombre del teorema o de la definición correspondiente (e.g., Definición de mediatriz).

EJEMPLO DE ANÁLISIS

A continuación, ejemplificamos la ruta con dos argumentos que encontramos en sendos fragmentos de la transcripción de un diálogo entre los estudiantes Hans, Juan y Lina, ocurrido en un curso de geometría plana de primer semestre universitario cuando realizaban una tarea propuesta por el profesor. El enunciado es el siguiente: En la figura, la medida del ángulo ABC es 57° y los ángulos ABC y BDE son congruentes. ¿Por qué la recta BD no es perpendicular a la recta DE ? (Figura 3).

Figura 3. Representación que acompaña el enunciado de la tarea



Paso 1: Delimitamos un episodio de transcripción, con sentido completo, en el que entrevemos la presencia de argumentos. Comienza con la primera reacción de un estudiante ante una pregunta y termina con una respuesta que satisface a todos.

1. Hans: Pues... la figura lo muestra así, miren las esquinas... no forman una cruz.
2. Lina: ¿Qué es lo que quiere decir que una recta sea perpendicular a otra?
3. Juan: Que en su intersección se forma un ángulo recto... Pero lo que tenemos que decir es por qué la recta BD no (enfatisa la voz) es perpendicular a la recta DE .
4. Lina: Pues... porque los ángulos eeehh... BDE , $ED...F$, FDG y GDB no son rectos (al referirse a los cuatro ángulos de vértice D , ha nombrado F y G , dos puntos que no están marcados en la figura).
5. Juan: ¿Y así no más? ¿Por qué el ángulo BDE no es recto?
6. Lina: ¡Fácil! Por ser congruente al ángulo ABC , mide lo mismo, mide 57, ya que ángulos congruentes tienen la misma medida.
7. Juan: Sí... ahora, nos falta decir por qué los otros tres ángulos no son rectos.
8. Lina: Porque se ve... No, mentiras. El opuesto por el vértice al ángulo BDE también mide 57.
9. Juan: Y los otros... cada uno, 180 menos 57.
10. Lina: Como los ángulos miden 57 y 123, no son rectos; para ser rectos, tendrían que medir 90.

Paso 2: Como contextualización, acompañamos el episodio con la pregunta del enunciado de la tarea propuesta por la profesora, que incluye una representación geométrica. Los estudiantes deben justificar que una recta no es perpendicular a otra, considerado ciertas condiciones dadas, información contenida en la representación y una norma del curso según la cual deben sustentar las afirmaciones con hechos geométricos o definiciones aceptados en clase.

Paso 3: Como resultado de una lectura completa y cuidadosa de la transcripción, con miras a formarnos una idea lo más clara posible de lo sucedido en la interacción en lo que concierne a la argumentación, proponemos el siguiente relato que, aunque no tiene detalles, esboza el episodio:

En la interacción se presenta una argumentación encaminada a justificar que dos rectas no son perpendiculares. Esta comienza por explicitar lo que entienden por rectas perpendiculares y se configura mediante acciones para justificar que ninguno de los cuatro ángulos determinados por la intersección de las dos rectas en cuestión es recto.

Paso 4a: Una nueva lectura cuidadosa nos permite identificar la presencia de un primer argumento conformado por partes de las intervenciones [3] y [4]. Armamos un párrafo con las frases de la transcripción que son clave para reconstruirlo. Esto hace que suprimamos las descripciones propuestas por el transcriptor y hayamos unido en un solo texto las dos intervenciones, para enfocarnos en las verbalizaciones clave: “[...] lo que tenemos que decir es **por qué** la recta BD no es perpendicular a la recta DE . [3b] Pues **porque** los ángulos BDE , EDF , FDG y GDB no son rectos. [4]”

Sin duda hay una aserción para la cual se pretende dar un por qué (“tenemos que decir [...] por qué [...]”) y está expresada de manera explícita; a menudo, nos toca conformarnos con inferir la aserción a partir del contexto del intercambio. El uso de la expresión “Pues porque” nos indica la conexión entre la oración en la que aparece y la anterior; así, vemos que en [4] se dan datos respecto a los ángulos determinados por las rectas consideradas, como razones para la aserción. No es explícita la garantía que respalda la conexión de la aserción con los datos que la justifican.

Paso 5a: Estamos ante un argumento abductivo simple incompleto. Los estudiantes infieren una posible razón para sustentar la no perpendicularidad, a partir de las condiciones dadas.

Paso 6a: Los elementos del argumento son: *Dato:* Los ángulos BDE , EDF , FDG y GDB no son rectos. *Aserción:* La recta BD no es perpendicular a la recta DE . *Garantía:* implícita, aunque podemos entreverla: definición de rectas perpendiculares.

Paso 4b: Una nueva lectura del episodio, permite identificar otro fragmento conformado por frases de las intervenciones [5-6], en el que entreveremos lo que podría ser un segundo argumento. Puesto que el dato aportado como razón de la no perpendicularidad de las rectas no es considerado suficiente como evidencia, se cuestiona y, en consecuencia, se abre la oportunidad para hacer un argumento que sustente por qué dicho dato es verdadero. Los términos “por” y “ya que” presentes en la expresión discursiva de la intervención [6] juegan un papel importante en el momento de hacer el análisis funcional; ambos nos indican la presencia de sendas razones. Centramos la atención en las siguientes frases: “¿**Por qué** el ángulo BDE no es recto?” [5b] **Por ser** congruente al ángulo ABC , mide lo mismo [que el ángulo ABC] [...] **ya que** ángulos congruentes tienen la misma medida” [5b].

Paso 5b: Estamos ante un argumento deductivo simple. A partir de una información con la que se cuenta (los ángulos ABC y BDE son congruentes), Lina afirma que tales ángulos miden lo mismo, exponiendo la definición de congruencia que conforma el puente entre la información dada y lo que afirma

Paso 6b: Con base en lo anterior, los elementos del argumento son: *Dato:* Los ángulos BDE y ABC son congruentes. *Aserción:* el ángulo ABC mide lo mismo que el ángulo BDE . *Garantía:* Ángulos congruentes tienen la misma medida.

Aun cuando la intención de los estudiantes, al parecer, era argumentar por qué el ángulo BDE no es recto, la aserción a favor de la cual argumentaron es que los ángulos BDE y ABC miden igual. En ese sentido, si bien la línea 5 explícitamente no indica que el ángulo BDE no es recto, sí genera información clave para poder inferirlo.

Por razones de espacio no podemos explicitar la ruta seguida para identificar y caracterizar los demás argumentos presentes en el fragmento que van en esa dirección. Pero resumimos el resultado obtenido al seguirla. Para llegar a concluir que el ángulo BDE no es recto se valen de dos datos incontrovertibles –los ángulos BDE y ABC tienen la misma medida (obtenido como conclusión en el argumento simple expuesto antes) y el ángulo ABC mide 57 (proporcionado en el enunciado de la tarea)– para justificar la aserción “el ángulo BDE mide 57 ” [6b]. La garantía que permite el paso de los datos a la aserción es la transitividad de la relación de igualdad. Luego construyen otro argumento en el que se valen de dos datos –el ángulo BDE mide 57 (aserción que acaban de obtener [6b]) y 57 es diferente a 90 – para justificar la aserción no explícita: el ángulo BDE no mide 90 . Después, usan como dato la aserción que acaban de obtener (el ángulo BDE no mide 90), para sustentar la aserción “el ángulo BDE no es recto” [5b]; la garantía que autoriza el paso del dato a la aserción es “la definición de ángulo recto”.

Los estudiantes se proponen justificar que los otros tres ángulos de vértice D no son rectos. Se centran en establecer las medidas de tales ángulos con miras a contrastarlas con la medida que deberían tener si fueran rectos. (Para hacer más fácil referirse a los ángulos vamos a tener en cuenta

la intervención [4]; así, los ángulos BDE y EDF son par lineal y por tanto suplementarios y los ángulos FDG y GDB son par lineal.) Dicen que el ángulo FDG mide 57, el ángulo EDF mide 123, el ángulo GDB mide 123. Esto les permite sustentar que dichos ángulos no son rectos. Se refieren a la definición de ángulo recto como garantía.

COMENTARIOS FINALES

Como señalamos previamente, hemos implementado la ruta descrita en tareas formuladas a estudiantes que se forman como profesores de matemáticas y la vemos como promisoría para apoyarlos en su formación profesional, pues les permite seguir en detalle la argumentación presente en una interacción en clase de geometría, a partir de la transcripción. De hecho, los análisis realizados ejemplifican aspectos discutidos con los profesores, principalmente sobre claves discursivas que dan indicios de argumentos, sobre la relación entre lo expuesto en el dato y en la aserción con la enunciación de la garantía y sobre el tipo de argumentación matemática, constituyéndose en indicios del cumplimiento del objetivo investigativo y un aporte importante del estudio. El ejercicio de identificar argumentos es una oportunidad para que los profesores hagan operativa la definición de argumento que les proponemos, así como la tipología de argumentación/argumento. Adicionalmente, al reconocer argumentos emitidos en clase, podrán ayudar a sus estudiantes a desarrollarlos completa y correctamente y a darse cuenta si la tarea les permitió argumentar.

La propuesta guarda alguna familiaridad con la sugerida por Knipping y Reid (2015; 2019); estos autores intentan capturar, en esquemas complejos, encadenamientos de argumentos; sin embargo, aunque proponen un procedimiento en tres pasos, que puede apoyar el ejercicio, no entran en detalles sobre cómo identificarlos en una interacción comunicativa, a partir de indicadores discursivos, asunto que consideramos un paso previo necesario para tipificar argumentos. Alsina, et al. (2021) también se ocupan de esquematizar un procedimiento de identificación de argumentos. Pero, debido a que la investigación se hace con niños de primera infancia, los autores centran los análisis en la “situación argumentativa”, más que en la caracterización específica de los argumentos formulados por los niños; proponen, entonces, identificar en las transcripciones quiénes hablan, sobre qué, qué dicen, para qué lo dicen, por qué lo dicen y cómo lo dicen, dejando en segundo plano la búsqueda de indicios discursivos de aserción y razones en los argumentos que proponen los estudiantes.

Otras investigaciones se valen de marcos de referencia sobre la argumentación, que guardan relación al propuesto en nuestro trabajo; en esos reportes se expone el resultado de la identificación de argumentos que los autores hacen como analistas, sin entrar en detalles sobre cómo procedieron para identificar fragmentos con visos argumentativos y cómo los reconstruyeron para ser analizados. Este es el caso de los estudios de Krummheuer (2015), Metaxas (2015), Boero et al., (2018) y Larios et al., (2017), quienes centran sus comunicaciones en la tipificación de argumentos, más que en la identificación. La explicitación del procedimiento seguido para identificar e interpretar los argumentos seguramente apoyaría a profesores e investigadores noveles. Es por esta razón por lo que en la ponencia ponemos el foco en explicitar el ejercicio analítico, más que en discutir los resultados.

Referencias

- Alsina, A., Cornejo-Morales, C. y Salgado, M. (2021). Argumentación en la matemática escolar infantil: Análisis de una actividad STEM usando la situación argumentative en conexión interdisciplinar. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 20, 141-159. <https://doi.org/10.35763/aiem20.3999>
- Boero, P., Fenaroli, G. y Guala, E. (2018). Mathematical argumentation in elementary teacher education: The key role of the cultural analysis of the content. En A. Stylianides y G. Harel (Eds.), *Advances in mathematics education research on proof and proving. ICME-13 Monographs* (pp. 49-67). Springer.

- de Sá Ibraim, S. y Justi, R. (2016). Teachers' knowledge in argumentation: Contributions from an explicit teaching in an initial teacher education program. *International Journal of Science Education*. DOI: 10.1080/09500693.2016.1221546.
- Durand-Guerrier, V., Boero, P., Douek, N., Epp, S. y Tanguay, D. (2012). Argumentation and proof in the mathematics classroom. En G. Hanna y M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education* (pp. 349-368). Springer.
- Knipping, C. y Reid, D. A. (2019). Argumentation analysis for early career researchers. En G. Kaiser y N. Presmeg (Eds.) *Compendium for early career researchers in mathematics education*. (pp. xx-xx). Springer.
- Knipping, C. y Reid, D. (2015). Reconstructing Argumentation Structures: A Perspective on Proving Processes in Secondary Mathematics Classroom Interactions. En A. Bikner-Ahsbals, C. Knipping, y N. Presmeg, *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education. Examples of Methodology and Methods* (pp. 75-101). Springer.
- Krummheuer, G. (2015). Methods for Reconstructing Processes of Argumentation and Participation in Primary Mathematics Classroom Interaction. En A. Bikner-Ahsbals, C. Knipping, y N. Presmeg, *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education. Examples of Methodology and Methods* (pp. 51-74). Springer.
- Larios, V., Pino-Fan, L. R. y González. N. (2017). Esquemas argumentativos de estudiantes de secundaria en ambientes de geometría dinámica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 12, 39-57. <https://doi.org/10.35763/aiem.v1i12.143>
- Lin, F.-L., Yang, K.-L., Lee, K.-H., Tabach, M. y Stylianides, G. (2012). Principles of task design for conjecturing and proving. En G. Hanna, *Proof and proving in mathematics* (pp. 305–325). Springer.
- Llinares, S. (2014). Experimentos de enseñanza e investigación. Una dualidad en la práctica del formador de profesores de matemáticas. *Educación Matemática*, nº extraordinario marzo, 31-51.
- Metaxas, N. (2015). Mathematical Argumentation of students participating in a mathematics – information technology project. *International Research in Education*, 3(1), 82 – 92.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN) (2006). *Estandares básicos de competencias en matemáticas, lenguaje, ciencias y ciudadanas*. Autor.
- Molina, O. (2019). *Sistemas de normas que favorecen la producción de argumentos: un curso de Geometría del Espacio como escenario de investigación*[Tesis de Doctorado no publicada]. Universidad de Los Lagos.
- National Governors Association Center for Best Practices y Council of Chief State School Officers. (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. Autor.
- Stylianides, A. y Ball, D. (2008). Understanding and describing mathematical knowledge for teaching: Knowledge about proof for engaging students in the activity of proving. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11(4), 307-332. DOI: 10.1007/s10857-008-9077-9.

ⁱ Este documento es producto de la investigación financiada por el Centro de Investigaciones de la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia (Proyectos DMA-587-22 y DMA-615-23)

ⁱⁱ Toulmin incluye seis posibles componentes de un argumento: los tres básicos y otros tres –respaldo de la garantía, matizador modal y condición de excepción a la aserción–. Aquí nos concentramos en los básicos.

ⁱⁱⁱ La transcripción debe exponer, de la manera más fiel posible, las verbalizaciones y acciones no verbales ocurridas en la interacción. Nosotros, por ejemplo, usamos los paréntesis redondos “()” principalmente para relatar acciones no verbales; los paréntesis angulares “[]” para hacer precisiones o elisiones cuando lo vemos relevante o conveniente (e.g., indicar a qué refiere un deíctico, completar una expresión con la que se designa un objeto pero no se explicita de qué objeto se trata).