Cátedra doctoral 2022-1 • Educación en ciencias y matemáticas: contextos, desafíos y oportunidades

El desafío de la formación de profesores de matemáticas en relación con los procesos matemáticos: el caso de la argumentación

Óscar Molina y Leonor Camargo

El tema de esta sesión de la cátedra gira en torno al proceso de argumentación matemática. Discutimos los desafíos que su complejidad demanda para la Educación Matemática y, especialmente, para la formación de profesores. Dicha complejidad es reconocida gracias a la relación simbiótica que hemos establecido entre la investigación que adelanta el grupo *Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría* y nuestra participación en los procesos de renovación curricular de los programas de formación inicial y continuada de profesores de matemáticas de la UPN. Además de presentar nuestra postura sobre argumentación matemática, como proceso sociocultural esencialmente discursivo, describimos e ilustramos cómo la hemos hecho operativa en la formación inicial y continuada de profesores. En particular, nos centramos en una aproximación metodológica que busca favorecer la "actividad demostrativa" (que ligamos estrechamente con la argumentación) y en un plan formativo para profesores en ejercicio, estructurado a partir de un modelo de conocimiento didáctico matemático del profesor, que apunta a apoyarlos en la tarea de impulsar en su aula ambientes de aprendizaje que contribuyan a favorecer la argumentación matemática.

1 Introducción

Desde la década del noventa del siglo pasado ha habido un interés creciente, en el campo de la Educación Matemática, por involucrar a los estudiantes en procesos de argumentación y demostración (Mariotti, 2006). Parece haber un consenso general sobre el hecho de que el desarrollo del sentido de la argumentación y de la demostración constituye un objetivo importante de la formación matemática. Por esta razón, hay una tendencia general a incluir este objetivo en las propuestas curriculares nacionales e internacionales. Incluso, en estas propuestas se señala que la argumentación y la demostración no son procesos reservados para ciertas actividades realizadas en momentos especiales, sino que deberían ser una parte natural y continua de las prácticas matemáticas del aula, independientemente del tema que se estudie.

Sin embargo, evidencias internacionales documentadas, ratificadas por nuestra labor investigativa, muestran que las pretensiones anteriores están presentes tímidamente en las realidades escolares en Colombia. De hecho, hay una tendencia a suponer que, dadas las dificultades encontradas en la mayoría de los alumnos para involucrarse en procesos de argumentación y demostración, muchos profesores abandonan esfuerzos de enseñanza tendientes a favorecerlos. Este fenómeno ha suscitado un apasionado debate entre los educadores de matemáticas, que ha producido un gran número de estudios (Mariotti, 2006; Stylianides, Bieda, & Morselli, 2016; Perry, Camargo, Samper, & Rojas, 2006; Molina, Luque, & Robayo, 2014).

Un rápido repaso a las contribuciones sobre los procesos de argumentación y demostración –que se pueden seguir en http://www.lettredelapreuve.it/, o en handbooks como *Proof and Proving in Mathematics Education* (Hanna & de Villiers, 2012) y *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (Mariotti, 2006; Stylianides, Bieda, & Morselli, 2016)–, deja ver que históricamente los estudios se han centrado en las concepciones de los alumnos sobre la demostración, y en general sobre las dificultades que tienen para enfrentarse a ella; en intervenciones didácticas que procuran incorporar la argumentación y la demostración en el aula y en cómo estas podrían ayudar a superar dichas dificultades. Más recientemente, las investigaciones han abordado asuntos como las concepciones de los profesores sobre la argumentación y la demostración, y en cómo construir un conocimiento especializado sobre estos procesos. En ese marco investigativo se ha procurado dar respuestas a preguntas como: ¿Cuál es la situación de la argumentación y la demostración en el aula de matemáticas? ¿Qué tipos de argumentos producen los estudiantes? ¿Qué tipo de argumentación procura fomentar la política educativa y cuál realmente es promovida en los currículos implementados? ¿Cuáles son las principales dificultades a las que se enfrentan los alumnos en relación con la argumentación y la demostración? ¿Cuál puede ser el origen de dichas dificultades? ¿Es posible superar las dificultades que encuentran los alumnos al argumentar y demostrar? ¿Cómo diseñar intervenciones didácticas para favorecer el desarrollo de estos procesos? ¿Qué sugerencias generales se pueden dar? ¿Qué conocimientos tienen los profesores sobre la argumentación y la demostración, y su didáctica? ¿Qué asuntos deben considerar los programas de formación de profesores sobre la argumentación y la demostración?

Sin duda, estas preguntas conducen a desafíos a los que la comunidad de educadores en matemáticas se ha abocado. En ese contexto, se tiene el propósito de dilucidar respuestas que orienten programas educativos dirigidos a la educación matemática de escolares y programas de formación inicial y continuada de profesores de matemáticas.

En esta sesión de la cátedra doctoral presentamos algunos avances que el grupo *Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría* (AEG) ha alcanzado sobre la argumentación matemática y cómo promover su aprendizaje en la formación inicial y continuada de profesores de matemáticas. Asumiendo la sugerencia de Reid y Knipping (2010) sobre la necesidad de precisar la postura conceptual que se adopta para fundamentar investigaciones sobre este proceso (dada la gran variedad de aproximaciones al respecto), en un primero momento presentamos una panorámica de posturas, para luego exponer e ilustrar la nuestra sobre los constructos *argumentación*, *demostración* y términos afines (argumento, justificación). Enseguida, ilustramos dos acercamientos mediante los cuales procuramos involucrar este proceso en los programas de Licenciatura en Matemáticas y Maestría en Docencia de la Matemática: una aproximación metodológica a lo que denominados “actividad demostrativa” (en la que se articulan la argumentación y la demostración) y un plan formativo para profesores en ejercicio, estructurado a partir de un modelo de conocimiento sugerido por Pino-Fan y Godino (2015), para apoyar a los profesores en la tarea de impulsar en sus aulas ambientes de aprendizaje que contribuyan a hace realidad las metas educativas sobre los procesos de argumentación y demostración.

2 Posturas sobre argumentación y demostración en Educación Matemática

Duval (1999) destaca dos razones por las cuales en la educación matemática hay un creciente interés sobre la *argumentación*: el reconocimiento de que la comunicación del pensamiento humano se basa en las lenguas naturales más que los lenguajes formales y la importancia de los procesos sociales en el aprendizaje de las matemáticas. A partir de tales premisas se han desarrollado diversas aproximaciones para conceptualizar este proceso. Reid y Knipping (2010) destacan por lo menos tres: (i) la relación entre *argumentación* y convencimiento (Perelman & Olbrechts-Tyteca, 1989), (ii) la estructura de un argumento y su referencia a las premisas aceptadas en una comunidad (Toulmin, 2007)[1], y (iii) la *argumentación* como actividad discursiva y focalizada en estructuras gramaticales (Anscombre & Ducrot, 1994).

[1] Reimpresión en español de su obra original The Uses of Arguments publicado en 1958.

A partir de estas aproximaciones (particularmente las dos primeras), Reid y Knipping (2010) proponen cuatro descripciones sobre *argumentación* reconocibles en la literatura especializada: como un tipo de razonamiento, como un comportamiento social, como un proceso que produce discurso lógico, o como un proceso que da lugar a la formulación de conjeturas. A su vez, sugieren que este proceso puede tener al menos tres roles en la educación matemática: como un obstáculo para el aprendizaje de la demostración (Duval, 1991; 1999); como parte integral de la actividad matemática, incluyendo el proceso de demostrar (Boero, Garuti, Lemut, & Mariotti, 1996; Boero, Douek, Morselli, & Pedemonte, 2010; Mariotti, Bartolini Bussi, Boero, Ferri, & Garuti, 1997); y, como una precondición para el aprendizaje matemático (Krummheuer, 1995; Yackel & Cobb, 1996). En lo que sigue, con el ánimo de ganar un poco de claridad sobre los conceptos *argumentación* y *argumento*, presentamos con mayor detalle algunas posturas; esto nos posibilita un escenario para asumir nuestra perspectiva.

Duval (1991) entiende que la *argumentación* es un tipo de razonamiento que tiene reglas implícitas provenientes tanto de la estructura del lenguaje, como del conocimiento de los hablantes. En consecuencia, el contenido semántico de las proposiciones puestas en juego es un aspecto esencial y por lo tanto no tiene ninguna relación con la demostración. Dicho autor asume la aproximación de Perelman según la cual la argumentación está ligada a la justificación o convencimiento de una tesis o pronunciamiento. En este escenario, un *argumento* es cualquier elemento (hecho, resultado de un experimento, un ejemplo, una definición, un teorema, etc.) que pueda ser usado para justificar o refutar una proposición. En esencia, para Duval un argumento es la respuesta a las preguntas *por qué tú dices esto* o *porque tú crees aquello*.

Boero y sus colegas (Boero, Garuti, Lemut, & Mariotti, 1996) asumen una postura sobre *argumentación* parecida a la de Duval, en el sentido de asumir la aproximación de Perelman relativa al convencimiento. Consideran que es cualquier discurso escrito u oral realizado de acuerdo con reglas compartidas y cuyo propósito es llegar a una conclusión mutuamente aceptable sobre una declaración cuyo contenido o verdad está en debate. Por lo tanto, incluyen la demostración como un caso especial de argumentación (Durand-Guerrier, Boero, Douek, Epp, & Tanguay, 2012, p. 349). Esta propuesta se distancia de la postura de Duval, dado que los investigadores asumen la argumentación en un sentido más amplio que admite a la demostración como un tipo especial de argumentación. Aunque reconocen la diferencia entre ambos procesos, conciben la posibilidad de continuidad entre ellos. De manera más específica, precisan que la argumentación está presente en las siguientes fases de la actividad matemática: la producción de una conjetura[2]; la formulación de una proposición que expone la conjetura; la exploración del contenido de la conjetura; la selección y encadenamiento de argumentos en cadenas deductivas; la organización de tales cadenas deductivas en una demostración aceptable, según los estándares matemáticos. Vale decir que en uno de sus trabajos ven el potencial de usar el Modelo de Toulmin para estudiar la estructura de los argumentos presentes en estas fases de la actividad matemática (Boero, Douek, Morselli, & Pedemonte, 2010). Más adelante precisamos este planteamiento.

Krummheuer (1995) asume que la *argumentación* es un proceso social que tiene lugar cuando los individuos, cooperativamente, tratan de adaptar sus intenciones e interpretaciones por medio de la presentación verbal de la racionalidad de sus acciones. Esta última no se funda necesariamente en la lógica formal (pero podría hacerlo) sino en la toma de la mejor decisión entre un conjunto de varias opciones; aquello que se considera como “lo mejor” se decide a partir de un proceso de

[2] Una conjetura es una aserción (proposición) hecha por un individuo o un colectivo cuya validez (teórica) están aún por establecer (Harel & Sowder, 2007).

negociación surgido en el marco de la interacción entre individuos. En consonancia con esta postura, la argumentación lleva al pronunciamiento de aceptación o rechazo de una aserción (o proposición).

Krummheuer (1995) usa la postura de Toulmin según la cual la argumentación fundamentada en deducciones produce *argumentos analíticos*; en contraste, aquellos argumentos que se fundamentan en otro tipo de racionalidad se denominan *argumentos sustanciales*. En una argumentación sustancial la declaración o decisión se verifica en la medida en que sean convincentes los antecedentes, las explicaciones o las justificaciones que se provean y en los significados que se le otorgan en el proceso. Al hacer esta distinción, Krummheuer (2015) concibe la argumentación en un sentido amplio y la entiende como un aspecto esencial para el aprendizaje de las matemáticas. Para este autor, aprender matemáticas es esencialmente participar en una práctica explicativa y justificativa produciendo argumentos. Por esta razón, no sólo es de interés estudiar cómo se estructuran argumentos producidos durante el trascurso de una interacción, sino también indicar de qué manera el profesor y los estudiantes (en un proceso educativo que tiene lugar en la microsociedad de la clase de matemáticas) participan en la producción interactiva-colectiva de tales argumentos. Para abordar la primera cuestión, el autor propone hacer análisis de la argumentación empleando el Modelo de Argumento de Toulmin (2007). Vale anotar que otros investigadores han visto el potencial de la postura de este autor. Yackel (2001; 2002) y Molina, Font y Pino-Fan (2021), por ejemplo, utilizan el Modelo citado como una herramienta para analizar el progreso en el aprendizaje de estudiantes universitarios, considerando el proceso de argumentación y las normas sociales y sociomatemáticas de la microcultura del aula (Yackel & Cobb, 1996; Cobb, Wood, Yackel, & McNeal, 1992). Molina y Samper (2019) lo usan para analizar tipos de argumentos que se promueven con ciertos problemas de geometría según la estructura de estos.

En la Tabla 1 sintetizamos las posturas antes presentadas en relación con los conceptos de *argumentación* y *argumento*. Al respecto, hay que destacar tres aspectos:

i. Tal como proponen Stylianides, Bieda y Morselli (2016), puede haber cierta consonancia en las posturas en el hecho de considerar la *argumentación* en una dimensión social; esto es, como aquello llevado a cabo por un individuo o un grupo para convencer a otros sobre la postura asumida al respecto de una aserción dada. Esta consonancia es consecuencia de que varios de los autores toman como referente la aproximación de Perelman.
ii. No hay un acuerdo respecto al término empleado para aludir al producto de una *argumentación*: unos le denominan *argumentación* (*e.g.*, Boero y colegas) y otros lo llaman *argumento* (*e.g.*, Krummheuer).
iii. No hay un acuerdo en la relación existente entre argumentaciones de índole lógica-deductiva (*e.g.*, una demostración) y otras maneras de argumentación. Duval advierte que existe una brecha insalvable; lo contrario advierten Boero y sus colegas.

Tabla 1. Síntesis posturas sobre argumentación.

Perspectiva según	Enfoque teórico usado	Acepción de Argumentación	Acepción de Argumento	Relación con la demostración
Duval	Perelman	Tipo de *razonamiento* ligado a la justificación o convencimiento de una tesis o pronunciamiento.	Cualquier cosa (hecho, definición, acción, teorema, etc.) que justifique o	La demostración no guarda alguna relación con la argumentación.

			refute una proposición.	
Boero y colegas	Perelman, Toulmin	Proceso que produce un discurso realizado de acuerdo con reglas compartidas y cuyo propósito es llegar a una conclusión mutuamente aceptable sobre una declaración cuyo contenido o verdad está en debate. Texto producido a través del proceso que contiene uno o varios argumentos conectados.	Razón o razones que se da a favor o en contra de una proposición u opinión.	La demostración es un caso particular de la argumentación.
Krummheuer; Yackel y colegas	Perelman, Toulmin	Proceso que tiene lugar en la interacción social en busca de tomar una decisión. Explicación intencional del razonamiento de una solución. Conjunto de técnicas o métodos que permiten establecer la postura sobre una proposición. Es una condición para aprender.	Resultado de una argumentación.	Argumentos sustanciales (basados en la semántica) y argumentos analíticos (lógico-deductivos). No se precisa si pueden estar relacionados.

Fuente: Basado en la propuesta de Reid y Knipping (2010)

2.1 Nuestra postura sobre argumentación y demostración en Educación Matemática[3]

Dada la diversidad conceptual sobre argumentación y argumento, y sobre la relación de estos con la demostración, expuesta en la sección anterior, es menester tomar una postura cuando se investiga al respecto o se quieren implementar acciones de enseñanza o aprendizaje. El grupo AEG ha procurado precisar definiciones para argumentación y argumento, de manera tal que se establezca una diferenciación entre ellos y se destaque qué se considera como proceso y qué como producto. Así mismo, ha procurado explicitar la relación entre argumento y demostración. A continuación, presentamos esta postura.

Tomando un enfoque sociocultural y discursivo sugerido por propuestas como la de Krummheuer (1995) y Boero, Garuti, Lemut, & Mariotti (1996), entendemos que un *argumento* es una expresión discursiva escrita u oral regulada por normas compartidas, que expone una postura o una proposición y las razones (justificación) que sustentan, respectivamente, el acuerdo con la postura o el valor de verdad de la proposición. Un argumento incluye una justificación, pero la relación recíproca no es cierta. Una *justificación* es un conjunto de razones para soportar la veracidad o falsedad de una proposición. El *argumento* incluye la aserción o conclusión (postura) que se sustenta con la justificación.

Para complementar la conceptualización expuesta de argumento, tomamos como referencia la propuesta estructural de Toulmin (2007) para un *argumento simple* (la unidad discursiva mínima identificada como argumento), que permite exponer la relación funcional entre los elementos básicos de un argumento. Así como *estructura de una oración* en castellano refiere a la disposición y relación de sus elementos básicos (sujeto y predicado) y *estructura de un texto expositivo* refiere

[3] Nuestra conceptualización se ha venido construyendo en el marco de la labor investigativa del Grupo Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría (AEG). Específicamente, la que acá presentamos es producto del proyecto titulado *Conocimiento del profesor de geometría para diseñar y gestionar tareas de argumentación y demostración* (DMA 518-20) financiado por el CIUP. Agradecemos los aportes de Patricia Perry, Carmen Samper y Claudia Marcela Vargas.

a las partes constitutivas (introducción, desarrollo y conclusión) y articuladas para crear una unidad discursiva cohesionada, podemos entender por *estructura funcional de un argumento* la disposición (el armazón) de los elementos que lo componen, determinada por la función que cada uno de ellos desempeña en el argumento simple: dato, garantía y aserción.

Así las cosas, un *argumento simple* es un argumento conformado por los elementos *dato* y *aserción* o *dato, garantía* y *aserción* relacionados funcionalmente así: el *dato* da fundamento a la *aserción*, es evidencia que justifica la aserción; la *garantía* da soporte a *la relación del dato y la aserción*, justifica con un enunciado general por qué el dato sirve como evidencia para apoyar la aserción. La *aserción* es una proposición que plantea una postura y que está presente en todo argumento. En ocasiones, se hace referencia a la aserción como una conclusión, pero desde nuestro punto de vista, la *conclusión* es una aserción que ha sido justificada. Con base en la descripción previa, refiriéndose a dato, aserción y garantía, Toulmin (2007) nos dice[4]:

> Ya disponemos de los términos necesarios para componer el primer esbozo de un esquema para analizar argumentos. Podemos simbolizar la relación entre dato y aserción a la que aquel sirve de sustento con una flecha, e indicar la autoridad que nos permite pasar del dato a la aserción escribiendo la garantía inmediatamente debajo de la flecha (Figura 1).

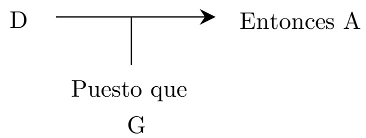

Figura 1. Modelo básico de argumento
Fuente: Toulmin (2007)

La *argumentación* es el proceso discursivo y sociocultural mediante el cual se producen argumentos de diferente naturaleza, según el elemento del argumento que se infiera en el proceso y el tipo de inferencia que se haga; un argumento es el producto de una argumentación. Cuando se busca inferir una aserción como conclusión necesaria de un conjunto de datos y de garantías, el argumento producido es una demostración. En ese sentido, la demostración es un tipo particular de argumentación.

2.2 Ejemplo para ilustrar la conceptualización de argumento

Usando la transcripción de un breve intercambio de Juan y Lina –estudiantes de un curso de geometría de primer semestre universitario– cuando trabajan conjuntamente para resolver una tarea, indicamos la presencia de al menos dos argumentos y los reconstruimos usando la estructura funcional propuesta por Toulmin.

[4] En realidad, Toulmin incluye seis elementos como posibles componentes de un argumento. Los cuatro ya mencionados –dato, garantía, aserción o conclusión, respaldo de la garantía– y otros dos, matizadores modales y condiciones de excepción o de refutación. En nuestro estudio nos enfocamos en los tres primeros. Para una documentación amplia del tema recomendamos la lectura del capítulo “La forma de los argumentos” (Toulmin, 2007/1958), en la traducción que María Morrás y Victoria Pineda hacen del libro de Toulmin.

En la Figura 2, $m\angle ABC = 57°$ y $\angle ABC \cong \angle BDE$. ¿Por qué $\overleftrightarrow{BD}$ no es perpendicular a $\overleftrightarrow{DE}$?

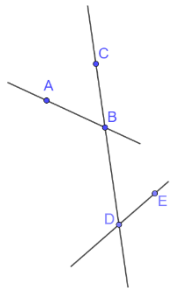

Figura 2. Representación de la situación sobre la que surge una interacción

1	Hans:		Pues… la figura lo muestra así, miren las esquinas… no forman una cruz.
2	Lina:		¿Qué es lo que quiere decir que una recta sea perpendicular a otra?
3	Juan:	a	Que en su intersección se forma un ángulo recto…
		b	Pero lo que tenemos que decir es por qué la recta BD **no** (enfatiza la voz) es perpendicular a la recta DE.
4	Lina:		Pues… porque los ángulos eeehh… BDE, $ED…F$, FDG y GDB no son rectos (al referirse a los cuatro ángulos de vértice D, ha nombrado como F y G dos puntos que no están marcados en la figura)
5	Juan:	a	¿Y así no más?
		b	¿Por qué el ángulo BDE no es recto?
6	Lina:	a	¡Fácil!
		b	Por ser congruente al ángulo ABC mide lo mismo, mide 57, ya que ángulos congruentes tienen la misma medida.
7	Juan:		Sí… ahora, nos falta decir por qué los otros tres ángulos no son rectos.
8	Lina:	a	Porque se ve… No, mentiras.
		b	El opuesto por el vértice al ángulo BDE también mide 57.
9	Juan:		Y los otros… cada uno, 180 menos 57.
10	Lina:		Como los ángulos miden 57 y 123, no son rectos; para ser rectos, tendrían que medir 90.

Para examinar la situación vamos a analizar las oraciones en algunas intervenciones, enfocándonos en las funciones que cumplen, con miras a identificar si se explicita una aserción que ha de ser sustentada, si se presentan datos para justificar la aserción, si se explicita una garantía para avalar los datos como justificación de la aserción.

En el fragmento de transcripción conformado por las intervenciones [3b] y [4] vislumbramos la presencia de un argumento. Podemos suprimir las descripciones puestas por el transcriptor y unir en un solo texto las dos intervenciones para enfocarnos en las verbalizaciones mismas:

> […] lo que tenemos que decir es por qué la recta BD **no** es perpendicular a la recta DE. Pues porque los ángulos BDE, EDF, FDG y GDB no son rectos.

Sin duda hay una aserción para la cual se pretende dar un por qué ("tenemos que decir […] por qué […]") y está expresada de manera explícita, lo cual no necesariamente ocurre siempre ya que, a menudo, nos conformamos con que la aserción se pueda inferir del contexto del intercambio. El uso de la expresión “Pues porque” nos indica la conexión entre la oración en la que aparece y la anterior; así, vemos que en [3] se dan datos respecto a los ángulos determinados por las rectas consideradas, como justificación de la aserción. No es explícita la garantía que respalda la conexión de la aserción con los datos que la justifican. En resumen, estamos ante un argumento simple incompleto (Figura 3), que podemos representar usando el esquema del Modelo de Toulmin para analizar argumentos[5]:

> **Datos**: Los ángulos BDE, EDF, FDG y GDB no son rectos.
> **Aserción**: La recta BD no es perpendicular a la recta DE.
> **Garantía**: No está explícita, aunque podemos entreverla: definición de rectas perpendiculares.

$\angle BDE$ no es recto, $\angle EDF$ no es recto, $\angle FDG$ no es recto, $\angle GDB$ no es recto

$\overleftrightarrow{BD}$ no es perpendicular a $\overleftrightarrow{DE}$

Definición Rectas Perpendiculares: Dos rectas son perpendiculares si determinan un ángulo recto.

Figura 3. Argumento 1 del ejemplo

Examinemos ahora el fragmento de transcripción conformado por las intervenciones [5-6b], en busca de la presencia de un argumento. Unamos en un solo texto las dos intervenciones:

> “[El ángulo BDE] [p]or ser congruente al ángulo ABC, mide lo mismo [que ABC] [...] ya que ángulos congruentes tienen la misma medida”.

Es posible identificar una aserción (“el ángulo ABC, mide lo mismo [que ABC]”). Los términos “por” (por razón de, a causa de) y “ya que” (porque, puesto que) presentes en la expresión discursiva de la intervención [6b] juegan un papel importante en el momento de hacer el análisis funcional; ambos nos indican la presencia de sendas razones. La primera razón que se está ofreciendo es que los ángulos BDE y ABC son congruentes, razón esta que no es cuestionable pues es una de las condiciones puestas en el enunciado de la tarea; es decir, cuenta como dato. La segunda razón alude a la definición de congruencia de ángulos. Así que, aunque la intención de los estudiantes, al parecer, era argumentar por qué el ángulo BDE no es recto, la conclusión a favor de la cual argumentaron es que los ángulos BDE y ABC miden igual. Entonces, vemos un argumento simple que esquematizamos de la siguiente manera (Figura 4):

[5] Nuestros esquemas funcionales para reconstruir argumentos van a tener las siguientes convenciones, basadas en lo que proponen al respecto Knipping y Reid (2019): el dato se presenta en marco rectangular con esquinas redondeadas, la aserción/conclusión en marco rectangular, la garantía en marco rectangular con esquinas anguladas, el respaldo en marco rectangular con esquinas anguladas ubicado debajo del que presenta la garantía y conectado con este por una línea. Además, la línea gruesa de un marco indica que tal elemento del argumento es el inferido, y la línea discontinua (guiones) de un marco indica que tal elemento no es explícito. Vale indicar que los esquemas propuestos no solo reportan el argumento mismo, sino que vislumbrar una huella de la argumentación llevada a cabo; esto por cuanto resalta aquello que es inferido durante el proceso y precisa si la garantía se produjo implícitamente o no. Una caracterización de los tipos de argumento y el esquema relativo a cada uno de ellos, permiten dar un mejor sentido esta aclaración. Ello se explica en la sección siguiente.

$\angle BDE \cong ABC$

$\mathrm{m}\angle BDE = \mathrm{m}\angle ABC$

Definición Ángulos Congruentes: Dos ángulos son congruentes si sus medidas son iguales.

Figura 4. Argumento 2 del ejemplo

2.3 Tipos de argumento

Varios investigadores han usado el Modelo funcional básico de un argumento propuesto por Toulmin para esquematizar diferentes tipos de argumentos (*e.g.*, Pedemonte, 2007; Conner, Sigletary, Smith, Wagner, & Francisco, 2014; Knipping & Reid, 2015, 2019; Krummheuer, 2015; Molina & Samper, 2019). En este capítulo, aludimos a tres tipos de argumentos: –inductivo, abductivo y deductivo–, según el papel que tiene cada elemento (dato, aserción y garantía) en una argumentación[6].

Haciendo eco de Krummheuer (1995) y Pedemonte (2007), quienes usaron el Modelo de Toulmin para caracterizar tipos de argumento, formulamos la siguiente definición para argumento deductivo: en un *argumento deductivo* la aserción es el elemento inferido necesariamente (durante la argumentación) a partir de un dato y una garantía. En este tipo de argumento, la aserción es consecuencia necesaria del dato con el que cuenta quien argumenta; el rasgo característico de "consecuencia necesaria" proviene de la garantía escogida[7] y del uso de un esquema de razonamiento válido en la lógica bivalente. Un argumento deductivo se corresponde con una demostración.

En la Figura 5 presentamos el esquema para un argumento deductivo. Debe tenerse en cuenta que las proposiciones que conforman la garantía tienen un carácter general, dada la connotación de generalidad que dicha garantía debe tener. Por otro lado, las proposiciones que conforman el "dato" y la "aserción" del argumento pueden tener o bien un carácter general como lo establecen las proposiciones que conforman la garantía, o bien ser un caso específico de estas. Los argumentos de las Figuras 3 y 4 son deductivos.

Dato

Aserción necesaria que se sigue del dato

Si dato, entonces aserción

Figura 5: Esquema de un argumento deductivo

[6] Algunos autores (*e.g.*, Conner, Sigletary, Smith, Wagner, & Francisco, 2014) etiquetan a la inducción, abducción, y deducción como *tipos de razonamiento* y no como *tipos de argumentos*. Otros autores (*e.g.*, Hernández & Parra, 2013) usan de manera indistinta las dos acepciones. Nosotros decidimos aludir a tipos de argumentos para mantener coherencia en la presentación del texto. Más aún, porque consideramos al razonamiento como un proceso cognitivo –que ocurre en las mentes de los sujetos– del cual no tenemos insumos visibles para tipificarlo; en consecuencia, preferimos aludir a argumentos ya que, en tanto discursivos, tenemos un insumo ostensivo que puede ser objetificado y, por ende, susceptible de ser tipificado. Cabe señalar, además, que algunos autores también se refieren al argumento por analogía. Al respecto se puede consultar Juthe (2005), Reid y Knipping (2010), Conner, Sigletary, Smith, Wagner y Francisco (2014), Molina, Pino-Fan y Font (2019) y Molina, Font y Pino-Fan (2021).

[7] Un enunciado condicional de índole general en cuyo antecedente se predica sobre las condiciones que se deben tener como dato, y en cuyo consecuente se predica sobre la condición resultante de manera inevitable cuando se cumple lo exigido por el antecedente.

Para caracterizar *argumento inductivo* adoptamos la caracterización propuesta por Hernández y Parra (2013, p. 63); en ella: (i) Las premisas presentan una característica que los elementos de un conjunto inicial *A* tienen en común. (ii) En las premisas también se establece que *algunos* de los elementos de tal conjunto comparten una segunda característica. (iii) En la aserción, se generaliza la segunda característica (compartida por un *subconjunto* de elementos no necesariamente propio) a, **por lo menos**[8], un nuevo elemento del conjunto *A* del que no se sabe, a partir de la información dada en las premisas, si realmente la tiene.[9]

En tal conceptualización es explícita la referencia a los datos ($i.e.$, la información que se presenta en las premisas) y a la aserción del argumento, pero no a la garantía. Desde nuestra perspectiva, la garantía de un argumento inductivo es el *patrón de generalización* que extiende un atributo a todos los elementos de un conjunto sin tener la seguridad de que todos lo tienen, sobre la base cierta de que algunos elementos del conjunto tienen dicho atributo. Puesto que el paso de los datos a la conclusión que dicha garantía autoriza no conduce necesariamente a una conclusión verdadera, tanto la garantía como la conclusión son enunciados de naturaleza probable. Formulamos el patrón así: Los elementos de A, los cuales tienen el atributo p, tienen el atributo q.

Teniendo en cuenta el criterio de tipificación mencionado, y sintetizando lo anterior, en un argumento inductivo la aserción y la garantía (patrón de generalización) son los elementos inferidos (durante la argumentación) a partir de un dato, y ambos son de naturaleza probable. El esquema que se muestra en la Figura 6 representa no solo la estructura funcional del argumento inductivo, sino que también marca los elementos que fueron inferidos en el curso de la argumentación en el que surgió el argumento, es decir, la aserción y la garantía.

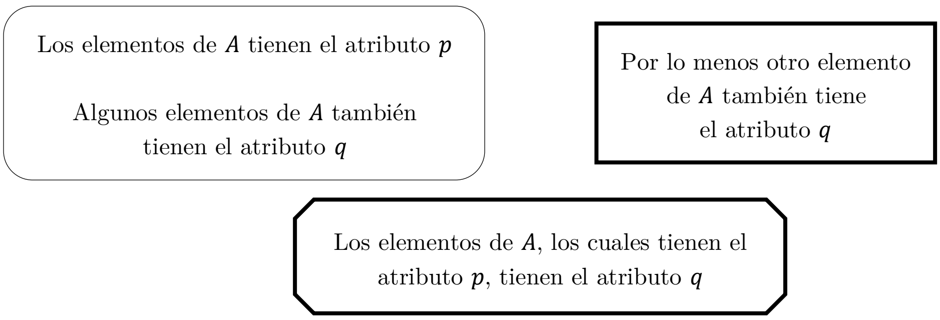

Figura 6: Esquema para argumento inductivo

Para ejemplificar este tipo de argumento, veamos la siguiente situación. Supongamos que se tiene tres puntos no colineales P, Q, R y se construyen las mediatrices de los segmentos PQ y QR siendo con X la intersección de tales mediatrices. A un grupo de estudiantes se les pregunta por la propiedad de X para diferentes posiciones de Q. Al exponer su solución, el grupo dice:

a. Establecimos que X hace parte de una recta que es la mediatriz del segmento PR.
b. Para ello, hicimos una exploración según la cual, tomamos las medidas XR y XP y las estudiamos para varias posiciones del punto Q. Establecimos que para esas posiciones de Q, $XR = XP$. Con ello, pensamos que para toda posición de Q, $XR = XP$.
c. Si eso pasa, X hace parte de una recta que es la mediatriz del segmento PR.

En el fragmento anterior se identifican dos argumentos que sustenta la aserción expuesta en línea a (X hace parte de una recta que es la mediatriz del segmento PR): uno inductivo, que se puede

[8] Énfasis nuestro. [Nota de autores del documento.]
[9] La letra en cursiva está en el original. [Nota de autores del documento.]

reconstruir con el fragmento b; y otro deductivo, que se puede reconstruir con la aserción del primer argumento y la línea c.

Los elementos de los argumentos se presentan a continuación. El esquema del argumento inductivo se presenta en la Figura 7; el del argumento deductivo en la Figura 8.

Argumento inductivo:

Dato: Puntos P, Q y R no colineales, m mediatriz del segmento PQ y n mediatriz de segmento QR, X el punto de intersección de m y n.
Medidas XR y XP
Varias posiciones de Q
Para esas posiciones de Q, se tiene que $XR = XP$

Aserción: Para todo Q, $XR = XP$.

Garantía, no explícita: P, Q y R no colineales, m mediatriz de segmento PQ y n mediatriz de segmento QR, X el punto de intersección de m y n, respectivamente, entonces $XR = XP$.

Puntos P, Q y R no colineales, m mediatriz de segmento PQ y n mediatriz de segmento QR, X el punto de intersección de m y n.
Varios puntos Q_i determinados por distintas posiciones de Q.
Diferentes posiciones de X correspondientes a puntos Q_i, denotados por X_i.
$X_iP = X_iR$.

Para todo Q,
$XP = XR$

P, Q y R no colineales, m mediatriz de segmento PQ y n mediatriz de segmento QR, X el punto de intersección de m y n, respectivamente, entonces $XR = XP$.

Figura 7: Esquema para argumento inductivo

Argumento deductivo:

Dato: Puntos P, Q y R no colineales, m mediatriz del segmento PQ y n mediatriz de segmento QR, X el punto de intersección de m y n.
Para todo Q, $XP = XR$

Aserción: X pertenece la mediatriz del segmento PR

Garantía, no explícita: *Definición de mediatriz*: Dados una recta y un segmento en el mismo plano. La recta es mediatriz del segmento en ese plano si y solo si todos sus puntos equidistan de los extremos del segmento.

Puntos P, Q y R no colineales, m mediatriz del segmento PQ y n mediatriz de segmento QR, X el punto de intersección de m y n.
Para todo Q, $XP = XR$

X pertenece la mediatriz del segmento PR

Definición de mediatriz

Figura 8: Esquema para argumento deductivo

En lo que respecta a un *argumento abductivo*, el dato (o parte de este) que justifica una aserción que formula un hecho observado es el elemento inferido (durante la argumentación); la inferencia se basa en una garantía conocida o creada durante la argumentación. En cualquier argumentación abductiva, puesto que se cuenta con un hecho observado para el que se pueden proponer varias causas o varias condiciones de las que podría depender, el dato inferido es de naturaleza probable. Para ilustrar lo anterior, veamos el siguiente ejemplo: A un grupo de estudiantes se les plantea que como un hecho observado se cuenta que dos segmentos son congruentes. Se les pregunta, ello de qué puede depender. Dos estudiantes responden:

> Estudiante A: puede depender de que los segmentos sean segmentos radiales de una misma circunferencia, porque sabemos que, en una circunferencia, si los segmentos son radios de tal circunferencia, entonces los segmentos son congruentes.
>
> Estudiante B: los segmentos pueden ser cuerdas equidistantes del centro de una circunferencia dada. Es que creo que si dos segmentos son cuerdas de una circunferencia que equidistan del centro de la circunferencia, entonces los segmentos son congruentes.

Con este escenario, es posible considerar que cualquiera de las dos condiciones se podría inferir como dato que sustenta el hecho observado, pero cualquiera que sea la inferencia hecha no es posible tener total certidumbre de que efectivamente esa sea la condición para el caso particular que se está considerando.

Reconocemos dos clases de argumento abductivo, según cuál sea el origen de la garantía: teórico, si la evoca (conoce) quien argumenta; y creativo, si la produce quien argumenta. Para ilustrar las dos clases, consideremos los ejemplos anteriores:

1. El Estudiante A, infiere que quizá "los segmentos son radiales de una misma circunferencia" conoce y usa el enunciado "Dada la circunferencia de centro, si los segmentos son radios de tal circunferencia, entonces segmentos son congruentes", el cual sería la garantía evocada de la cual infiere el dato; en tal caso, la garantía sería teórica. De la respuesta reconocemos que él conoce tal enunciado pues utiliza la expresión "sabemos" antes de decirla.

2. El Estudiante B, infiere con incertidumbre que "los segmentos podrían tener la misma distancia al centro de la circunferencia de la cual son cuerdas". Al usar la expresión "creo" tenemos evidencia razonable para pensar que el estudiante creó, en el curso de la argumentación, la garantía para sustentar el paso del dato inferido a la aserción; en tal caso, la garantía sería creativa.

Las Figuras 9 presentan sendos esquemas según el tipo de argumento abductivo. La Figura 10 expone el esquema para el argumento abductivo asumiendo la respuesta del estudiante A y el caso (1) descrito; la Figura 11 presenta lo correspondiente para el Estudiante B y caso (2).

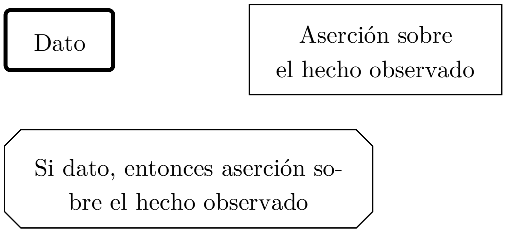

Figura 9a: Esquema de argumento abductivo teórico

Aserción: Segmentos son congruentes
Dato: Los segmentos son radios de una misma circunferencia

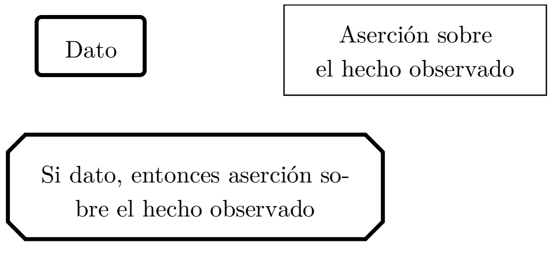

Figura 9b: Esquema de argumento abductivo creativo

Aserción: Segmentos son congruentes
Dato: Los segmentos son cuerdas equidistantes del centro de una circunferencia dada

Garantía evocada: Dada la circunferencia de centro C y radio r, si los segmentos son radios de tal circunferencia, entonces los segmentos son congruentes.

Garantía creada: Si dos segmentos son cuerdas de una circunferencia de centro C que equidistan de C, entonces los segmentos son congruentes

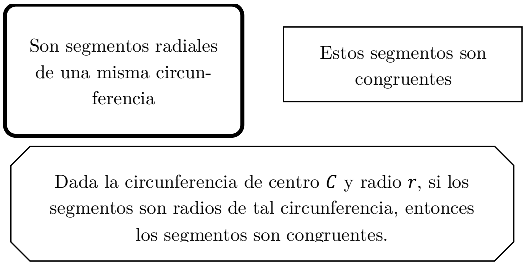

Figura 10: Esquema para ejemplo de argumento abductivo teórico

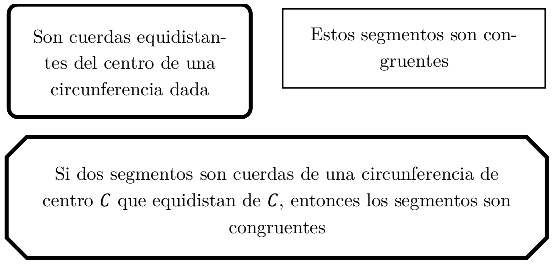

Figura 11: Esquema para ejemplo de argumento abductivo creativo.

3 Formación inicial de profesores sobre el proceso de argumentación

En los ejercicio académicos e investigativos del grupo *AEG*, además de la precisión ganada sobre argumento, argumentación y demostración, hemos formulado dos acercamientos que deberían considerarse para profesores de matemáticas, en formación o en ejercicio, para contribuir a su formación matemática y didáctica sobre el proceso de argumentación. En esta sección nos referimos, en primer lugar, a una aproximación metodológica, fruto de una innovación curricular, a lo que denominados "actividad demostrativa" (en la que se articulan la argumentación y la demostración), con la que procuramos promover este trabajo en la formación inicial. En segundo lugar, describimos, *grosso modo*, un plan de formación para profesores en ejercicio, estructurada a partir de aspectos del conocimientos didáctico matemático del profesor, para apoyarlos en la tarea de impulsar en sus aulas ambientes de aprendizaje que contribuyan a hace realidad las metas educativas sobre los procesos de argumentación y demostración.

3.1 Primer momento: Aproximación metodológica en la formación inicial

Distinguimos dos momentos durante la formación inicial de profesores que pretenden promover la argumentación en los estudiantes. Uno, en el que se pretende que ellos vivan una actividad matemática rica (resuelvan problemas, representen, exploren, conjeturen y demuestren), en la que el proceso de argumentación y la explicitación de argumentos es protagonista. Otro, en el que se pretende que se concienticen de esos procesos vividos y se estudien como objeto el proceso de argumentación y asuntos relacionados (*e.g.*, argumento, estructura de un argumento, tipos de argumento), y el diseño de tareas que promuevan la argumentación.

En relación con el primer momento, destacamos tres elementos sobre los que recae nuestro esfuerzo didáctico innovador para generar un entorno favorable para aprender a demostrar: tareas matemáticas, la interacción social en la clase y el uso de la geometría dinámica. En relación con el segundo, destacamos tres elementos también: Tareas para reconocer concepciones de los estudiantes sobre argumento y argumentación producto de su experiencia académica previa; tareas para promover conocimiento especializado sobre estos constructos; tareas para promover el diseño de tareas de argumentación. A continuación, describimos cada uno de estos elementos.

3.1.1 Las tareas matemáticas que se proponen a los estudiantes

En los cursos de geometría de la formación inicial asumimos como un eje principal el proceso de argumentación matemática. Por lo tanto, las tareas que se proponen a los estudiantes deben ofrecer oportunidades para involucrarse en tal proceso de manera significativa. Buscamos desplazar del currículo tareas del tipo "Demuestre/Justifique que…" por tareas que dan lugar a una actividad en la cual se conjetura y se producen argumentos inductivos, abductivos y deductivos.

Las tareas para proponer a los estudiantes son elemento central de la innovación y objeto de un cuidadoso diseño por parte del grupo de investigación. Específicamente se procura que sean situaciones problema *interesantes*, para así poder estimular la actividad demostrativa; los problemas sean *abiertos*, para así generar diversos puntos de vista y favorecer la argumentación, y también *pertinentes*, para así propiciar una experiencia sistemática de trabajo dentro de un sistema teórico en construcción. Estas tareas no se proponen esporádicamente ni tampoco con el propósito de complementar o aplicar lo que se hace en el curso; son, en cambio, parte central del medio didáctico usual que organiza el profesor para el aprendizaje de los estudiantes.

Para favorecer el proceso de argumentación, las situaciones problema propician la exploración empírica (con artefactos digitales), para comprender la situación, encontrar regularidades, formular conjeturas y producir sus justificaciones.

Consideramos que esta forma de gestionar el contenido es uno de los elementos de la innovación que desafían de manera más fuerte la tradición de la matemática escolar y universitaria que propende hacia la presentación de los contenidos organizada en términos de relaciones establecidas desde el saber matemático y no desde el punto de vista de la construcción del conocimiento de los estudiantes. Ejemplos de tareas pueden ser consultados en Camargo, Samper, Perry, Molina y Echeverry (2009), Molina y Samper (2019) y Molina, Font y Pino-Fan (2021).

3.1.2 Interacción social en la clase

Formular una conjetura o proferir una idea de la que se está más o menos convencido no es suficiente para emprender el proceso de demostración. Por ello, la interacción social en el aula entre profesor y estudiantes y entre estudiantes es un factor imprescindible del aprender a producir argumentos. Esto porque es en la comunicación de ideas, en el análisis crítico de estas, en la argumentación colectiva donde surgen los elementos necesarios para construir argumentos inductivos, abductivos y deductivos y se comprende el papel que juegan dichos argumentos en la actividad matemática. El papel del profesor como guía de la interacción es fundamental pues es él –como experto de la comunidad de la clase– quien puede dirigir el rumbo del proceso hacia el uso de términos, símbolos y formas de expresión propios de la práctica de la argumentación en matemáticas. A través de la interacción social, los estudiantes pueden cambiar la tradicional relación que tienen con el conocimiento, con su profesor y con sus compañeros. Con respecto al conocimiento, pueden llegar a comprender que más que conocer la estructura de un sistema teórico, tienen que vivir la experiencia de conformarlo en colaboración con los demás miembros de la comunidad. Con respecto al profesor, pueden dejar de considerarlo como la autoridad en la clase y la única persona que tiene el saber, y en cambio pueden llegar a verlo como el miembro experto de la comunidad que guía el proceso. Con respecto a los otros estudiantes, pueden llegar a establecer un compromiso mutuo de trabajar en pro de la construcción de un sistema teórico.

Al iniciar el curso, el profesor hace explícitas las normas sociales y sociomatemáticas (Yackel y Cobb, 1996) relacionadas con la exigencia de justificar todas las ideas, escuchar la argumentación del otro y producir justificaciones de acuerdo con parámetros establecidos. También controla de manera sistemática el cumplimiento de tales normas. Gradualmente, a medida que avanza el desarrollo del curso, transfiere la responsabilidad a los estudiantes quienes comienzan a sentirse cómodos produciendo argumentos y controlando el cumplimiento de las normas planteadas.

3.1.3 El papel de programas de geometría dinámica

El tercer elemento de la aproximación metodológica que busca promover la formación sobre el proceso de argumentación se enfoca en la importancia de los programas geometría dinámica como herramientas de mediación en el proceso de aprender a producir argumentos. Siguiendo a muchos investigadores en el campo (e. g., Arzarello, Olivero, Paola, & Robutti, 2002; Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010; Arzarello, Bartolini-Bussi, Leung, Mariotti, & Stevenson, 2012), afirmamos que, si vinculamos las tareas de construcción geométrica con el proceso de argumentación, incrementamos la posibilidad de aprender a producir argumentos y desarrollar conciencia de la necesidad de promover explícitamente dicho proceso.

Hemos podido reconocer que el uso de programas de geometría dinámica puede mediar en varios asuntos que son de importancia fundamental en el proceso de argumentación (Camargo, Samper, Perry, Molina, & Echeverry, 2009; Molina & Samper, 2019). Dado que los principios presentes en el diseño de estos programas se corresponden esencialmente con los postulados de la geometría euclidiana, por medio de ellos es posible establecer conjeturas, sobre propiedades invariantes bajo el arrastre, con un alto grado de probabilidad de que ellas sean válidas en el sistema teórico en construcción. A continuación, puntualizamos seis usos que hacemos de programas de geometría dinámica: (i) entender que el cumplimiento de la tesis de un enunciado "si… entonces…" depende de todas las condiciones de la hipótesis; (ii) propiciar la creatividad, a través de construcciones auxiliares, para elaborar argumentos que llevan a la demostración de teoremas; (iii) crear situaciones que dan lugar a suficientes resultados para poder construir una porción del sistema teórico; (iv) (v) corroborar las conjeturas formuladas por otros. ; (vi) entender el desarrollo lógico de una demostración; (vii) descubrir relaciones geométricas entre las partes de figuras, que se podrían involucrar en la demostración.

3.1.4 Segundo momento: Espacio de reflexión sobre la experiencia vivida alrededor del proceso de argumentación

En el segundo momento de la formación inicial pretendemos que los estudiantes se concienticen de la experiencia vivida sobre la argumentación y se estudie el proceso de argumentación, asuntos relacionados (*e.g.*, argumento, estructura de un argumento, tipos de argumento) y el diseño de tareas que promuevan la argumentación. En la Tabla 2, hacemos una síntesis de las tareas que se incluyen en este espacio de formación y sobre las cuáles nos encontramos en un proceso de rediseño a partir de unas primeras implementaciones.

Tabla 2. Descripción de tareas de formación profesional

Reconocer concepciones	Los estudiantes utilizan su conocimiento sobre argumento, lo explicitan y reconocen lo que saben al respecto. Para ello se les pide solucionar en grupos pequeños un problema geométrico, y posteriormente analizar sus intervenciones durante la solución del problema enfocándose en los argumentos producidos.
Construir conocimiento especializado	Los estudiantes avanzan en su conceptualización relativa a argumento como objeto de estudio (*i.e.*, avanzar en vocabulario especializado). Para ello se les pide leer cuidadosamente textos específicos, en donde se encuentran los significados que proponemos, e interactuar con ellos respondiendo preguntas formuladas respecto a los textos, reconociendo y explicitando asuntos sobre los que se requiere hacer claridad, etc. Además, involucran su conocimiento informado (ya institucionalizado) sobre argumento y reflexionen sobre este con miras a ampliarlo, profundizarlo o cuestionarlo. Para ello se les pide analizar, en grupos pequeños, algunos fragmentos de interacciones comunicativas de dos estudiantes que resuelven un problema de conjeturación.

Promover el diseño de tareas de argumentación	Los estudiantes se sensibilizan sobre la importancia de formular cuidadosamente los enunciados de las tareas cuando estas se diseñan, dado que estos influyen notoriamente en la posible actividad matemática que se espera que ellos hagan. Adicionalmente, establecen criterios para la elaboración de enunciados de tareas que favorezcan la producción de argumentos no necesariamente deductivos.

Ilustramos este segundo momento de la formación inicial con dos tareas que se exponen en la Tabla 3, las cuales se corresponden a los dos últimos tipos de tareas.

Tabla 3. Ejemplo de tareas para la formación profesional sobre argumento

Tarea para promover el conocimiento especializado
Vamos a usar la siguiente definición de argumento: Argumento es una expresión discursiva escrita u oral regulada por normas compartidas, que expone una postura o una proposición y las razones (justificación) que sustentan, respectivamente, el acuerdo con la postura o el valor de verdad de la proposición. 1) Para cada una de las siguientes actividades, haz una especulación basada en los rasgos que caracterizan a un argumento, según la definición dada, con miras a determinar si el posible discurso podría ser un argumento. Es fundamental que expliques tus respuestas: a) Presentar una definición. b) Plantear una pregunta. c) Relatar una secuencia de hechos ocurridos en un intercambio en una clase. d) Hacer una demostración en clase de geometría. e) Usar la definición de cuadrado para determinar si un caso particular es cuadrado 2) En la definición de argumento, se alude a una expresión discursiva "regulada por normas compartidas". En tu opinión, ¿a qué normas pueden estar refiriéndose? 3) Con base en la experiencia vivida en los espacios académicos Elementos de Geometría y Geometría Plana, ¿qué normas compartidas guían la producción de argumentos en la clase? ¿Hay algún cambio de reglas del primer curso al segundo? 4) En la definición se dice que un argumento expone una postura o una proposición y las razones (justificación) que sustentan el acuerdo con la postura o el valor de verdad de la proposición. Presenta dos ejemplos de argumento; uno que exponga una postura y su justificación, y otro que exponga una proposición y su justificación.
Tarea para promover el diseño de tareas de argumentación
Si un trapecio es isósceles, entonces las mediatrices de los lados paralelos coinciden. El enunciado anterior es un teorema de la geometría euclidiana, que te servirá de contexto geométrico para diseñar tres tareas para un curso de Geometría Plana. Las tareas deben: (i) propiciar el surgimiento de argumentos (es decir, resolver el problema debe ofrecer la posibilidad de argumentar) y (ii) promover la explicitación de argumentos (es decir, cumplir las indicaciones dadas en las instrucciones de la tarea debe impulsar al resolutor a argumentar). 1) Diseña una tarea que (i) incluya un problema que propicie principalmente el surgimiento de un argumento deductivo y (ii) promueva la explicitación del argumento 2) Diseña una tarea que (i) incluya un problema que propicie principalmente el surgimiento de un argumento deductivo y (ii) promueva la explicitación del argumento 3) Diseña una tarea que (i) incluya un problema que propicie principalmente el surgimiento de un argumento deductivo y (ii) promueva la explicitación del argumento

3.2 Formación continuada de profesores sobre la argumentación

En el programa de maestría en el cual somos profesores, hemos involucrado a un grupo de estudiantes en un trabajo académico ligado al desarrollo de sus trabajos de grado, en el que buscamos promover un ejercicio reflexivo de caracterización y transformación de aspectos del conocimiento didáctico matemático del profesor sobre la argumentación. Buscamos apoyarlos en la tarea de impulsar en sus aulas ambientes de aprendizaje que contribuyan a hace realidad las metas educativas sobre los procesos de argumentación y demostración. En lo que sigue, presentamos algunos elementos de ese proceso.

La estructura general del programa atiende a los requerimientos para programas de maestría en Colombia. Los estudiantes ingresan a un programa de dos años, tiempo en el cual asisten a espacios académicos de fundamentación conceptual e investigativa y desarrollan un trabajo de grado con la orientación de un director, profesor del programa.

Al comenzar 2020, el grupo AEG asumió el liderazgo de la formación de los estudiantes que ingresaron a esa cohorte, con la intención de promover el conocimiento profesional mencionado. Los espacios de fundamentación conceptual se centraron en promover el desarrollo de conocimiento especializado sobre argumento y argumentación, principalmente en las facetas epistémica, mediacional e interaccional de la Dimensión Didáctica del Modelo de Conocimiento didáctico matemático sugerido por Pino-Fan y Godino (2015). Por ejemplo, en un espacio académico se propuso a los estudiantes resolver problemas abiertos de conjeturación (Molina & Samper, 2019) y, a partir del proceso de solución se introdujeron elementos de la conceptualización de argumento y argumentación, tales como, qué es un argumento, en que momentos del proceso de resolución surgen, qué tipos de argumento pueden surgir en las diferentes etapas del proceso, entre otros. En otro espacio académico se estudió el papel mediador de los programas de geometría dinámica en el impulso que se puede dar en clase a la formulación de argumentos. Particularmente, se estudió el proceso de exploración dinámica que puede conducir tanto a argumentos inductivos, como abductivos y deductivos, según la actividad se centre en descubrir invariantes, identificar la "causa" de un cierto comportamiento al arrastre de los elementos de una construcción o establecer relaciones de dependencia entre propiedades. En un tercer espacio, se hizo un trabajo a profundidad sobre lo que era una tarea matemática de argumentación, los principios para el diseño de tareas de argumentación y algunos elementos constitutivos del diseño de una tarea.

Los espacio de formación investigativa se encaminaron a estudiar la estrategia de investigación–acción, cuya adaptación a los intereses de la cohorte, el grupo AEG consideró apropiada para promover ciclos de reflexión sobre el conocimiento puesto en juego alrededor de la práctica de diseñar tareas para favorecer la argumentación, con apoyo de programas de geometría dinámica. En estos espacios, además de profundizar en la estrategia, se apoyó a los estudiantes en la escritura de la problemática que abordarían en el desarrollo de los trabajos de grado (centrada en la búsqueda de una vía para transformar su conocimiento didáctico sobre el diseño de tareas de argumentación, medidas con tecnología digital), en la revisión de antecedentes y en la formulación de la estrategia investigativa.

Simultáneamente al proceso formativo, de la mando de un director, los estudiantes, trabajando en parejas, adelantaron varios ciclos de investigación–acción, en el que movilizaron planes de acción tendientes a propiciar una tranosformación de su conocimiento matemático didáctico. Estos planes buscaban que los estudiantes se involucraran en acciones que incidieran en su comunidad, bien de profesores de matemáticas de las instituciones donde trabajan, o de compañeros del postgrado. Entre las acciones que implementaron están la preparación de conferencias para impartir en sus instituciones, seminarios de discusión con profesores, liderazgo de procesos formativos en la institución tendientes a modificar las prácticas de los profesores en el área de geometría, etc. Para organizar y liderar tales espacios, los estudiantes vieron la necesidad de profundizar en la fundamentación y avanzar de disponer de un conocimiento "referencial" con base en los estudios realizados, a tener un conocimiento "propio" con el cual proponer discursos y tareas sólidamente fundamentados.

4 Referencias

Anscombre, J. C., & Ducrot, O. (1994). *La argumentación en la lengua.* Madrid: Gredos.

Arzarello, F., Bartolini-Bussi, M., Leung, A., Mariotti, M., & Stevenson, I. (2012). Experimental Approaches to Theoretical Thinking: Artefacts and Proofs . En G. Hanna, & M. de Villiers, *Proof and Proving in Mathematics Education* (págs. 97-146). New York: Springer.

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *ZDM*, *34*(3), 66-72.

Baccaglini-Frank, A., & Mariotti, M. (2010). Generating Conjectures in Dynamic Geometry: The Maintaining Dragging Model. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 15*, 225–253.

Bartolini Bussi, M. G. (1998). Verbal interaction in mathematics classroom: A Vygotskian analysis. En H. Steinbring, M. G. Bartolini Bussi, & A. Sierpinska, *Language and Communication in the Mathematics Classroom* (págs. 65–84). Reston, VA: NCTM.

Blumer, H. (1969). *Symbolic interactionism.* Engelwood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. *Iternational Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof.* Obtenido de http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/990708Theme/990708ThemeUK.html

Boero, P., Douek, N., Morselli, F., & Pedemonte, B. (2010). Argumentation and proof: a contribution to theoretical perspectives and their classroom implementation. En M. M. Pinto, & T. F. Kawasaky (Ed.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. 1*, págs. 179-204. Belo Horizonte, Brazil: PME.

Boero, P., Garuti, R., Lemut, E., & Mariotti, M. (1996). Challenging the traditional school approach to theorems: A hypothesis about the cognitive unity of theorems. En L. Meira, & D. Carraher (Ed.), *Proceedings of the 19th PME International Conference*, *2*, págs. 113-120.

Camargo, L., Samper, C., Perry, P., Molina, O., & Echeverry, A. (2009). Use of dragging as organizer for conjecture validation. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis, *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2* (págs. 257-264). Thessaloniki, Greece : PME.

Cobb, P., Wood, T., Yackel, E., & McNeal, B. (1992). Characteristics of classroom mathematics traditions: An interactional analysis. *American Educational Research Journal, 29*, 573–604.

Douek, N. (2007). Theorems in School. From History, Epistemology and Cognition to Classroom Practice. En P. Boero, *Theorems in School* (págs. 163-184). Rotterdam: Sense Publishers.

Durand-Guerrier, V., Boero, P., Douek, N., Epp, S., & Tanguay, D. (2012). Argumentation and Proof in the Mathematics Classroom. En G. Hanna, & M. de Villiers, *Proof and Proving in Mathematics Education* (págs. 349-368). New York: Springer.

Duval, R. (1991). Structure du raisonnement deductif et apprentissage de la demonstration Duval. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(3), 233–261.

Duval, R. (1999). *Algunas cuestiones relativas a la argumentación.* Obtenido de Lettre de la Preuve: http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/991112Theme/991112ThemeES.html

Garfinkel, H. (2006). *Estudios en etnometodología.* (H. Pérez, Trad.) Bogotá: Anthropos.

Hanna, G., & de Villiers, M. (2012). *Proof and Proving in Mathematics Education.* New York: Springer.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. En P. Cobb, & H. Bauersfeld, *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (págs. 229–269). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Krummheuer, G. (2015). Methods for Reconstructing Processes of Argumentation and Participation in Primary Mathematics Classroom Interaction. En A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping, & N. Presmeg, *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education. Examples of Methodology and Methods* (págs. 51-74). Dordrecht: Springer.

Mariotti, M. (2006). Proof and Proving in Mathematics Education. En A. Gutiérrez, & P. Boero, *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future* (págs. 173-204). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Mariotti, M., Bartolini Bussi, M., Boero, P., Ferri, F., & Garuti, R. (1997). GarutiApproaching geometry theorems in contexts: from history andepistemology to cognition. En E. Pehkonen, *Proceedings of the 21st Conference of the theInternational Group for thePsychology of Mathematics Education* (Vol. 1, págs. 180-195). Lahti, Finland: PME.

Molina, O., & Samper, C. (2019). Tipos de problemas que provocan la generación de argumentos inductivos, abductivos y deductivos. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 32*(62).

Molina, O., Font, V., & Pino-Fan, L. (2021). Norms That Regulate the Theorem Construction Process in an Inquiry Classroom of 3D Geometry: Teacher's Management to Promote Them. *Mathematics, 9*(18), 2296.

Molina, Ó., Luque, C., & Robayo, A. (2014). Producción de teoremas con estudiantes en extraedad: la justificación de una conjetura. *Tecné, Episteme y Didaxis, 35*, 39-61.

Perelman, C., & Olbrechts-Tyteca, L. (1989). *Tratado de la Argumentación.* (J. Sevilla, Trad.) Madrid: Editorial Gredos.

Perry, P., Camargo, L., Samper, C., & Rojas, C. (2006). *Actividad demostrativa en la formación inicial del profesor de matemáticas.* Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Pino-Fan, L., & Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma, 36*(1), 87-109.

Reid, D., & Knipping, C. (2010). *Proof in Mathematics Education. Research, Learning and Teaching.* Rotterdam: Sense Publishers.

Stylianides, A., Bieda, K., & Morselli, F. (2016). Proof and Argumentation in Mathematics Education Research. En A. Guitérrez, G. Leder, & P. Boero, *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (págs. 315-352). Rotterdam: Sense Publishers.

Toulmin, S. (2003). *The Uses of Arguments* (Actualización de 1 ed.). Cambridge: Cambridge University Press.

Toulmin, S. (2007). *Los usos de la argumentación.* (M. Morrás, & V. Pineda, Trads.) Barcelona, España: Ediciones Península.

Voigt, J. (1995). Thematic patterns of interactional and sociomathematical norms. En P. Cobb, & H. Bauersfeld, *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (págs. 163-202). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

von Glasersfeld, E. (1984). An introduction to radical constructivism. En P. Watzlawick, *The invented reality* (págs. 17-40). New York: Norton.

Yackel, E. (2001). Explanation, Justification and argumentation in mathematics classrooms. *Proceedings of the 25th conference of the international group for the psychology of mathematics education PME-25* (págs. 1-9). Utrecht: PME.

Yackel, E. (2002). What we can learn from analyzing the teacher's role in collective argumentation. *Journal of Mathematical Behavior, 21*(4), 423–440.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27(4)*, 458-477.

Zack, V. (1997). "You have to prove us wrong": Proof at the elementary school level. En E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st PME. 4*, págs. 291–298. Lanti: PME.