



Pedagogía, Didáctica y Educación Matemática

Profesor Ángel Homero Flores Samaniego

Tanto por el contenido como por el origen, la actividad y la mente [humanas] son sociales: son actividad social y mente social... Si el hombre es, por naturaleza, un ser social, sólo puede desarrollar su verdadera naturaleza en la sociedad y el poder de su naturaleza no deberá medirse por el poder de los individuos privados sino por el de la sociedad. (Karl Marx)

Resumen

En el contexto de la Educación Matemática existe una cierta confusión de términos y conceptos que poco contribuyen a entender el ámbito de acción de investigadores y docentes. No se sabe a ciencia cierta si docentes e investigadores se desenvuelven en el campo de la pedagogía o de la didáctica, si somos docentes, profesores, educadores o instructores. En el presente ensayo, buscaré respuesta a la pregunta: ¿Qué somos y cuál es nuestro campo de trabajo o de actividad?; y haré una reflexión sobre el quehacer educativo en el ámbito de la matemática y sobre el papel de la pedagogía y la didáctica en este quehacer; sobre la matemática y la naturaleza del pensamiento matemático; y sobre el papel de la matemática en el desarrollo educativo del estudiante.

Introducción

¿Qué somos? ¿Docentes, profesores, educadores, maestros, instructores? ¿Cuál es nuestro ámbito de acción, la educación matemática, la didáctica de la matemática, la enseñanza de la matemática, la matemática educativa, la docencia en matemática?

En alguna ocasión, hace varios años, un catedrático de una universidad mexicana decía que, en el ámbito de la educación escolarizada, un educador es quien atiende a niños de preescolar; un docente es el que atiende a estudiantes de los niveles primario, secundario y medio superior; mientras que un profesor o maestro es el

profesional que enseña en el nivel superior. Con respecto a la matemática –decía-, un educador, además de educar en cuestiones de comportamiento, enseña algunos aspectos básicos de la matemática; un docente se dedica, básicamente, a enseñar matemática (su papel como educador es mínimo y va disminuyendo conforme se avanza en los niveles escolares); finalmente el profesor o maestro (académico o catedrático) dicta cátedra de matemática en las universidades y parte de sus actividades es hacer investigación, ya sea en el campo de su conocimiento (matemática) o en educación. Esta visión de la docencia la he encontrado no sólo en académicos universitarios, sino también en docentes de niveles básicos.

Ahora bien, el término educación matemática se utiliza en ciertos casos como sinónimo de didáctica matemática y en otros como sinónimo de investigación educativa en matemática; en algunas Instituciones de Educación Superior de México y en algunos países latinoamericanos se utiliza el término *matemática educativa* (acuñado en el Cinvestav-IPN de México) para referirse a la investigación educativa en matemática:

A lo largo del tiempo, las sociedades han conformado instituciones con el objeto de incorporar a las matemáticas y a la ciencia en la cultura de la sociedad con la clara intención de favorecer entre la población una visión científica del mundo. Este intenso proceso social de *culturización científica*, nos ha ayudado a reconocer la necesidad de implementar modificaciones educativas en el campo particular de las matemáticas con base en diseños mejor adaptados a las prácticas escolares. Del estudio de los efectos de tales procesos se ocupa la matemática educativa. (Cantoral y Farfán, 2003: 28).

Mientras que el término *educación matemática* es usado para referirse a la enseñanza-aprendizaje de la matemática (casi siempre en un ambiente escolarizado). Por su parte, en España y Francia usan el término didáctica de la matemática con un significado parecido al de educación matemática:

En los años 70' surge en Francia la acepción de "Didáctica de las Matemáticas" por el investigador Guy Brousseau, quien levanta bajo este nombre una nueva disciplina científica que estudia la comunicación de conocimientos y de sus

transformaciones, por medio de una epistemología experimental que intenta teorizar sobre la producción y circulación de los saberes. (Vidal, R. 2016: 1)

En países como Inglaterra y Estados Unidos de Norteamérica se utiliza el término *mathematics education* para hablar de cuestiones de enseñanza-aprendizaje de la matemática o para hablar de la investigación educativa en matemática.

Por si fuera poco, hay autores que toman los términos como sinónimos:

La mayoría de las actividades de la ME [*Matemática Educativa*] están relacionadas con la problemática que se presenta en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. La denominación varía de acuerdo a las diferentes regiones geográficas ya que en Europa se denomina Didáctica de las Matemáticas, para los de habla inglesa Mathematics Education y Educación Matemática en varios países de habla hispana. (Nieto, Viramontes y López, 2009, p. 16).

Ante este panorama cobran sentido las preguntas con que inicié este texto y que se pueden resumir en lo siguiente:

¿Qué somos y cuál es nuestro campo de trabajo o de actividad?

En el presente ensayo, además de responder a la pregunta anterior, haré una reflexión sobre el quehacer educativo en el ámbito de la matemática y sobre el papel de la pedagogía y la didáctica en este quehacer; sobre la matemática y la naturaleza del pensamiento matemático; y, por último, sobre el papel de la matemática en el desarrollo educativo del estudiante.

Pedagogía, didáctica y educación

Retomo la concepción de **pedagogía** como la ciencia de la educación que describe y explica el fenómeno educativo en sus vínculos y nexos con la praxis social de humanización (Franco, 2012); y entenderemos por humanización el proceso de integración de un individuo a una sociedad dada. Es innegable que el ser humano es un animal social como lo apunta Marx; su esencia, aquello que lo caracteriza, se desarrolla y tiene sentido en el seno de una sociedad. En consecuencia, la sociedad es la encargada de educar (humanizar) a sus integrantes de forma que colaboren en su desarrollo y la enriquezcan.

Ahora bien, considero, como Engels, que el pensamiento y la conciencia humanos son producto de su cerebro que, a su vez, es producto de la naturaleza (Antidhüring, 1878, 2003), entonces, pensamiento y conciencia deben ser parte de la conexión natural: la sociedad en armonía con la naturaleza.

Parte de la pedagogía se encarga del estudio de los fenómenos educativos que se dan en el seno de los sistemas escolarizados y tiene injerencia en la **didáctica**, que se encarga de estudiar las técnicas y las estrategias de aprendizaje en la escuela. Así, la escuela es parte importante en el proceso de humanización de los integrantes de una sociedad (Figura 1).

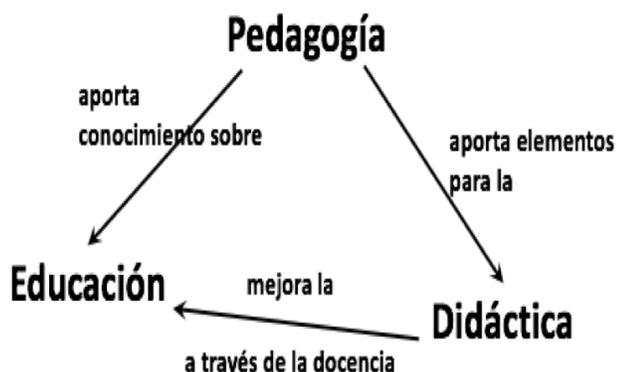


Figura 1. Relación entre Pedagogía, Didáctica y Educación.
Elaboración propia

En el ámbito del aprendizaje escolar de la matemática, la pedagogía se encargaría de

estudiar los fenómenos educativos que se dan en un aula de matemática (o en la escuela) y aportaría elementos (estrategias, métodos y técnicas) para mejorar la educación matemática de los estudiantes, es decir, enriquecería la didáctica matemática; y la educación matemática es tanto el proceso de aprendizaje de la disciplina como el cúmulo de conocimiento matemático del estudiante y su correcta aplicación en múltiples contextos, ya sean éstos escolarizados o no.

Así, cuando hablo de docencia me refiero al quehacer de un profesor dentro del aula; por tanto, el docente de matemática es el encargado de fomentar el aprendizaje de la disciplina en la escuela (independientemente del nivel educativo en el que se desempeñe); dependiendo de su preparación y de su compromiso con su labor educativa, el docente hará un mayor y mejor uso de la didáctica, incorporando elementos aportados por la pedagogía.

Cuando se habla de didáctica se suele decir que su objetivo es mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje: la enseñanza como actividad necesaria e indispensable

para lograr el aprendizaje. En este sentido, es generalizada la concepción de didáctica matemática en los términos que expresan Arteaga y Macías (2016)

La didáctica de las matemáticas centra su interés en todos aquellos aspectos que forman parte del proceso de enseñanza-aprendizaje (metodologías y teorías de aprendizaje, estudio de dificultades, recursos y materiales para el aprendizaje, etc.) de este campo de conocimiento, facilitando a maestros y profesores herramientas necesarias para *impartir la docencia* sobre unos cimientos consistentes, orientándole y guiándole en el ejercicio de su profesión en beneficio del aprendizaje de sus alumnos. (p. 20, las cursivas son propias)

La docencia se imparte, y la mayoría de los modelos de enseñanza-aprendizaje apuntan a mejorar las técnicas y las estrategias de enseñanza para propiciar o

fomentar un mejor aprendizaje (o un 'aprendizaje significativo', como suelen decir no pocos profesores). Muchos de tales modelos se basan en el llamado triángulo didáctico o triángulo pedagógico, en el que se muestran las relaciones entre el saber, el profesor y el estudiante.

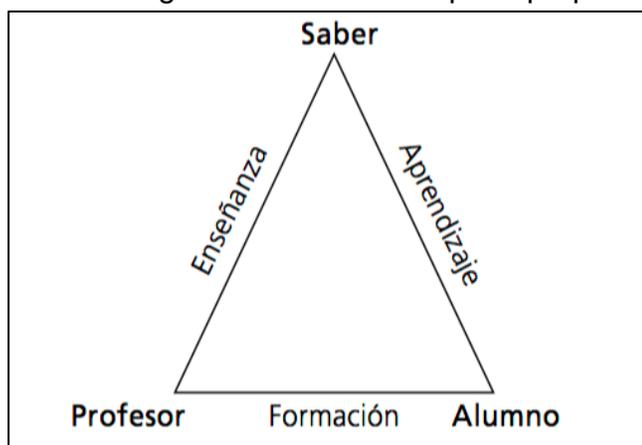


Figura 2. Triángulo pedagógico. Tomado de Ibáñez, 2007.

Así, la enseñanza es la relación

que existe entre profesor y saber (el profesor enseña el saber o conocimiento); el aprendizaje es la relación entre el saber y el estudiante (el estudiante aprende un cierto saber); y la formación es la relación que existe entre profesor y estudiante (el profesor forma al estudiante). En la Figura 2 presento el triángulo pedagógico diseñado por Houssaye (1988).

Conceptos como el de *transposición didáctica* se han acuñado en el seno de teorías destinadas a mejorar la enseñanza del saber (o del conocimiento): *un contenido de saber que ha sido designado como saber a enseñar, sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para ocupar un lugar entre los objetos de enseñanza. El "trabajo" que transforma de un objeto de*

saber a enseñar en un objeto de enseñanza, es denominado la transposición didáctica (Chevallard, 1985, p. 47). Y la teoría de las situaciones didácticas de Guy Brousseau es un ejemplo de una teoría en dónde se transforman situaciones a-didácticas (situaciones que no tienen una intención didáctica o de enseñanza) en situaciones didácticas (situaciones con las que se enseña un cierto saber) a través de la transposición didáctica (Brousseau, 1977). Por lo general, la interpretación que se hace de la teoría de Brousseau tiene ese sesgo hacia la enseñanza para mejorar el aprendizaje.

En una didáctica de este tipo, se parte del supuesto de que el profesor es el experto, tanto en la disciplina como en didáctica, que puede hacer la transposición didáctica y enseñar el conocimiento (saber a enseñar); es decir, el aprendizaje del contenido matemático, o de cualquier materia, dependerá de la experiencia y la sapiencia del profesor, del manejo que haga de la didáctica.

Este modelo de enseñanza-aprendizaje conlleva una carga ideológica enorme: existe un ser superior que posee el conocimiento (y cómo enseñarlo) y que lo transmitirá a sus estudiantes. Es este ser quién decide si sus estudiantes han aprendido lo que él les enseña, para ello los examina meticulosamente. En caso negativo, él es quien decide si el estudiante tiene derecho a seguir adelante con las materias siguientes y, en muchos casos, su decisión determina si el estudiante sigue o no con sus estudios. Este esquema de enseñanza ha estado vigente en nuestras escuelas (en particular en el sistema superior) desde hace varios siglos, independientemente de teorías constructivistas o socio culturales que nos dicen cómo aprende el ser humano: el concepto de evaluación como sinónimo de calificación a través de exámenes es una prueba fehaciente de esto.

El esquema que esboqué en el párrafo anterior, apunta a una educación elitista en la que pocos llegan a tener éxito en la sociedad; sólo llegan aquellos que se apegan a las reglas del juego y hacen lo que se les dice pues de este modo sus problemas en la escuela serán menos y la probabilidad de éxito (medido en ingresos monetarios) mayor.

En el contexto de una sociedad democrática que vive y se desarrolla en un entorno de degradación ambiental (evidenciada, principalmente, por fenómenos como el calentamiento global y la extinción de especies animales y vegetales), ¿qué papel deben jugar la pedagogía y la didáctica en el proceso educativo (de humanización) de los estudiantes? ¿El estudio de la matemática en la escuela puede contribuir a este proceso?

La respuesta a la primera pregunta, o al menos una de ellas, estaría en el enfoque que le damos a la didáctica y, tomando en cuenta este enfoque, lo que tiene que decir la pedagogía.

Empezaré por considerar que el binomio enseñanza-aprendizaje no es una unidad indisoluble y que la didáctica muy bien puede enfocarse en el aprendizaje y dejar de lado el intermediario, muchas veces nefasto, de la enseñanza.

En primer lugar, el profesor dejaría de ser el experto que enseña, que da la luz, para convertirse en un organizador y diseñador de actividades de aprendizaje, y en un recurso más del estudiante para el aprendizaje deseado.

En segundo, el estudiante no sería una especie de objeto susceptible de ser enseñado y del cual el profesor debe extraer evidencias del aprendizaje mediante un examen riguroso de su conocimiento. En lugar de ello, el estudiante es un aprendiz que, mediante su desempeño y su actividad en el grupo, proporciona evidencias de su aprendizaje. Estas evidencias son valoradas por los demás integrantes del grupo (profesor y compañeros estudiantes) que se conforman en una suerte de comunidad de aprendizaje, entendida como un conjunto de personas que conviven armónicamente en busca de un conocimiento común.

En tercero, al conformarse en una comunidad de aprendizaje, es posible que el grupo fomente valores como la tolerancia, el respeto y la cooperación en un afán por conseguir el objetivo común: el aprendizaje de la materia.

Por último, si se forman líderes no sería por decreto, o por temor, como se da muchas veces en una didáctica centrada en la enseñanza sino por su capacidad de aprender y de compartir su conocimiento con los demás. Es muy factible que los estudiantes sean aprendices con un conocimiento aceptable de la materia, con

disponibilidad para compartir su conocimiento y que se identifiquen como parte activa de la comunidad.

Es decir, se tendría una comunidad en la que la autoestima y la seguridad en sí mismo de los estudiantes sería alta.

La respuesta a la segunda pregunta (¿el estudio de la matemática en la escuela puede contribuir a este proceso?) es positiva: el aprendizaje de la matemática puede contribuir al proceso de humanización del estudiante, es decir, a su formación como ser social que se desempeña en el seno de una sociedad y que trabaja para el desarrollo y el avance de la sociedad a la que pertenece, con la convicción de que de ello dependerá su propio bienestar. Para que esto sea posible, es necesario hacer una reflexión sobre la matemática y la naturaleza de lo que se ha dado por llamar pensamiento matemático.

La matemática y el pensamiento matemático

La matemática es el cuerpo de conocimiento relativo a los números y al espacio; en cuanto a los primeros se trata de estudiar sus operaciones, interrelaciones, combinaciones, generalizaciones y abstracciones; con respecto al segundo, estudia su estructura, su medición y sus transformaciones. La matemática funge como teoría o ciencia aplicada que explica la realidad a través del modelado o modelaje matemático; como herramienta en la resolución de problemas en ámbitos no matemáticos; como una meta-ciencia, en el sentido de que se estudia a sí misma y aborda problemas surgidos de la matemática; y como un lenguaje que sirve para comunicar información y aclarar ideas (adaptado de Merriam Webster's Collegiate, Dictionary, 1993 y de SUMEM, 2014).

El conocimiento matemático se genera a través de la acción, la experimentación y la reflexión sobre lo actuado y lo experimentado. Esto independientemente del uso de la matemática como teoría aplicada o meta ciencia. El conocimiento matemático se construye sobre la base de la definición de objetos matemáticos y ciertas afirmaciones y hechos fundamentales con respecto a la relación entre tales objetos que se dan por verdaderos o válidos (definiciones y axiomas o postulados); surge como una conjetura que debe ser validada tomando en cuenta las definiciones y los

axiomas: una vez validada, adquiere el rango de teorema que, a su vez, puede ser utilizado en el mismo nivel que un axioma.

Así, la reflexión matemática que lleva al conocimiento se conforma por una serie de razonamientos que constituyen lo que denomino *pensamiento matemático*. Por consiguiente, considero que el pensamiento matemático no es otra cosa que una manifestación del pensamiento reflexivo en el quehacer matemático. Según Dewey (1910), el pensamiento reflexivo es un tipo de razonamiento en el que ponemos en consideración nuestras creencias debido a información nueva que las ponen en duda; se manifiesta como una concatenación de ideas en las que una de ellas es consecuencia de la anterior.

Dewey define cinco pasos lógicos del pensamiento reflexivo (Flores, 2017: 28):

- a) La sensación de una dificultad o su percepción.
- b) Su ubicación y su definición.
- c) Sugerencias de posibles soluciones o explicaciones en la forma de hipótesis o de conjeturas.
- d) Desarrollo, mediante razonamientos lógicos, de las implicaciones de las conjeturas.
- e) Observación y experimentación más detallada que lleva a la aceptación o al rechazo de la conjetura.

La percepción de la dificultad, su ubicación y su definición, y el establecimiento de una hipótesis o conjetura que la expliquen se conoce como *razonamiento abductivo*, caracterizado por Peirce (2014) de la siguiente manera:

Se percibe un cierto hecho (H) que asombra o llama la atención. Se piensa: si C fuera cierto, entonces estaríamos observando el hecho H, y como lo estamos observando, entonces es plausible (posible) que C sea cierto. C es la conjetura que, si fuera cierta, explicaría el hecho H, por tanto, el siguiente paso es buscar la validez de la conjetura.

En el desarrollo de la ciencia hay infinidad de ejemplos de este tipo de razonamiento. La explicación del efecto fotoeléctrico es un buen ejemplo: se observó que, al incidir cierto tipo de luz sobre algunos metales, éstos emiten

electrones (H); si la luz, en lugar de comportarse como una onda, se comportara como una partícula (C), entonces estaríamos observando el efecto fotoeléctrico. En consecuencia, es factible que la luz se comporte como un haz de partículas.

Albert Einstein publicó esta conjetura en un texto de 1905, 'heurística de la generación y la conversión de la luz', cuya demostración le llevó a obtener el Premio Nobel en 1921.

El pensamiento reflexivo de una persona será más efectivo cuanto más información y conocimiento tenga. En el ámbito de la matemática, la aplicación de la teoría y la forma de argumentar y validar conjeturas será mejor en la medida en que el individuo avance y profundice en la disciplina. Por tanto, cuando se habla de un pensamiento matemático avanzado en realidad se está hablando de un pensamiento reflexivo ejercido por un individuo cuyo conocimiento matemático es avanzado.

Consideremos el siguiente episodio, sucedido en una de mis clases:

Al inicio del estudio de la geometría analítica en un curso de bachillerato los estudiantes deben hallar una de las alturas de un triángulo del cual sólo se tienen las coordenadas de sus vértices. El profesor esperaba que los estudiantes usaran la fórmula para la distancia de un punto a una recta. Los alumnos trabajaban en parejas.

Uno de los equipos obtuvo su altura aplicando la ley de cosenos al triángulo para obtener uno de sus ángulos interiores y con el seno de éste hacer el cálculo.

El profesor preguntó por qué no habían usado la fórmula de la distancia de un punto a una recta, a lo que los estudiantes respondieron que sí lo habían considerado, pero como no tenían la ecuación de la recta y no estaban seguros de cómo obtenerla, habían decidido aplicar lo que sabían de trigonometría.

¿Cuál de los dos procedimientos es más efectivo? De haber sabido cómo encontrar la ecuación de la recta teniendo dos de sus puntos, ¿habrían usado la fórmula? El razonamiento que usaron los estudiantes para resolver el problema ¿es más avanzado o complejo que si hubieran usado la fórmula?

La cuestión es que el conocimiento provee recursos para que el pensamiento reflexivo sea más efectivo, no es que haya escalas en el pensamiento reflexivo (o en el pensamiento matemático).

En este tenor, se suele dividir el pensamiento matemático en varios tipos: numérico, algebraico, geométrico, variacional, probabilístico, etcétera. Si consideramos que la matemática es un único cuerpo de conocimiento (no existen muchas matemáticas) que se divide en ramas, como la geometría, la trigonometría o la topología, para su estudio, entonces no tiene sentido dividir el pensamiento matemático en una miríada de pensamientos que sólo vienen a complicar el panorama de la didáctica y de la educación matemática: **el pensamiento matemático es uno y se manifiesta con características diferentes dependiendo de la rama de la matemática en el que se aplica.**

Otra cuestión importante por considerar es que el conocimiento que genera el pensamiento reflexivo puede ser adoptado socialmente y utilizado en la medida en que sea efectivo. Por ejemplo, en una actividad de preescolar (Brizuela, 2013) los estudiantes (edades entre 3.5 y 4 años), entre otras actividades, tenían que dividir algunas figuras geométricas en cuatro partes iguales. Una de las estudiantes se dio cuenta de que si trazaba una cruz sobre la superficie que quería dividir, entonces podría obtener cuatro partes iguales. Usó este procedimiento en sus actividades y lo explicó a sus compañeros: más adelante, la totalidad de los integrantes del grupo usaban lo que ellos llamaron 'la regla de la cruz' para dividir figuras en cuatro partes iguales. Las figuras que usaron fueron círculos, rectángulos y cuadrados, por lo que la regla se podía aplicar sin problemas.

Un comentario que hizo un profesor con relación a la regla de la cruz es que no es una regla general y que se podía refutar fácilmente si usamos figuras no simétricas; pero ése no es el punto a resaltar en este caso, sino que una conjetura (la regla de la cruz o cualquiera otra) es válida en la medida que se pueda aplicar para resolver problemas o para explicar un fenómeno. De hecho, dejó de tener vigencia cuando, al final de la actividad, se partió un pastel que había que repartir entre 10 personas, 9 estudiantes y la maestra.

Guardando toda proporción, una situación similar es la que retoma Lakatos en su obra *Pruebas y refutaciones* (1976): su ensayo es una ilustración del uso del pensamiento reflexivo en el seno de una sociedad matemática a lo largo de varios siglos.

En resumen, el pensamiento reflexivo aplicado al estudio de la matemática, es decir el pensamiento matemático, juega un papel relevante en la generación y en la validación de conocimiento matemático. El razonamiento abductivo es, en la mayoría de los casos, el detonante del pensamiento reflexivo. Una vez que se plantea una conjetura como explicación plausible de nuestra observación o nuestro resultado, buscamos validarla utilizando procedimientos inductivos y deductivos en lo que llamamos esquemas de argumentación (Flores 2007, 2017).

Ahora bien, es posible fomentar y desarrollar el pensamiento reflexivo en un ámbito escolar. En este caso, el estudio de la matemática es uno de los vehículos que ayudan a este desarrollo; y, a su vez, el uso del pensamiento reflexivo facilita enormemente el aprendizaje de la matemática. Es decir, conforman un círculo virtuoso.

Lo anterior se optimizaría si la docencia estuviera fundamentada en una didáctica centrada en el aprendizaje. Como veremos en la siguiente sección.

Educación matemática y didáctica

Definí, al inicio del presente texto, educación matemática como el proceso de aprendizaje de la matemática y como el bagaje de conocimiento matemático que posee un individuo y su correcta aplicación.

En una didáctica centrada en el aprendizaje se tienen dos aspectos a considerar igualmente importantes: las actividades de aprendizaje y el ambiente de aprendizaje.

Para que los estudiantes (sin importar el nivel educativo en que se encuentren) tengan una buena educación (es decir, que apliquen el conocimiento matemático de manera correcta) hay que tomar en cuenta las cuatro funciones de la matemática

(herramienta, ciencia o teoría aplicada, meta-ciencia y lenguaje) en el desarrollo de las actividades de aprendizaje en el aula.

Para su estudio y aplicación, podemos clasificar las actividades de aprendizaje en actividades de exploración y formación de conjeturas, de resolución de problemas y de modelado.

El primer tipo de actividades, por lo general, se dan en el ámbito de la geometría; ayudan bastante en el desarrollo del pensamiento reflexivo en cuanto al uso de esquemas de argumentación en la validación de conjeturas; el segundo tipo de actividades fomentan el desarrollo de heurísticas de resolución de problemas y la aplicación de algoritmos; finalmente en las actividades de modelado se pone el énfasis en la aplicación de la matemática en la explicación de fenómenos naturales o no, matemáticos o no.

Los elementos de la clasificación no son mutuamente excluyentes, es decir, se pueden tener actividades en las que el modelado juega un papel relevante, pero esto no significa que no se tengan que formar conjeturas o que no se resuelva algún problema de aplicación; la clasificación obedece a que el énfasis se pone en alguno de los aspectos sin descartar los otros. Tomemos, por ejemplo, la siguiente actividad diseñada a partir de un problema clásico de optimización en cálculo diferencial.

Se pide a los estudiantes que doblen una hoja de papel con forma rectangular de modo que una de las esquinas superiores quede justo en el borde inferior (Figura 3).

Como se aprecia en la figura, al doblar la hoja se forma el triángulo rectángulo que he resaltado. El área de este triángulo depende de la ubicación de la esquina superior en el borde inferior.

La primera pregunta que se puede plantear es: ¿cómo varía el área del triángulo con respecto a la longitud del lado formado por el borde inferior de la hoja?

La persona o equipo que realiza la actividad puede hacer el siguiente razonamiento: el área del triángulo está en dos dimensiones y la longitud del lado inferior es una dimensión, por tanto, el área será una función cuadrática con respecto al lado. Y Entonces enfocarse a validar su conjetura, para lo cual

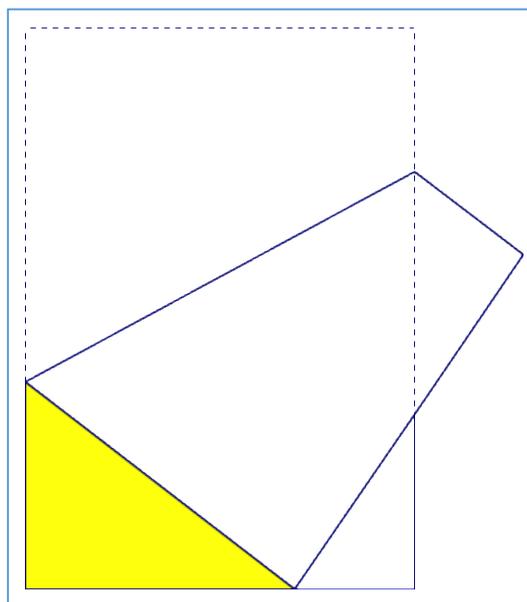


Figura 3. Hoja doblada. Elaboración propia

debe resolver el problema de expresar el área en términos de la longitud del lado.

También se podría considerar la actividad como el estudio del fenómeno que aparece cuando se dobla la hoja, en particular, hallar el modelo matemático que nos diga cómo es la variación del área del triángulo como función de la longitud de uno de sus lados.

Sí, además, se pide que se haga la simulación de la hoja doblada con un software de Geometría Dinámica (GD) la actividad adquiere una dimensión diferente en la que las posibilidades de acción aumentan. Por ejemplo, el conocimiento geométrico (y del software) necesario para hacer la construcción y que resista la prueba del arrastre; o la posibilidad de medir área y lado, graficarlo en un sistema de coordenadas y ajustar la curva que mejor se adapte a los puntos.

La otra pregunta que se plantea es: ¿qué medida debe tener el lado del triángulo para que su área sea máxima? El resultado se puede hallar explorando la función con el software de GD o utilizando el concepto de derivada de una función, si se está en un curso de Cálculo.

En todas las actividades es importante pedir a los estudiantes que expliquen y justifiquen sus resultados y sus estrategias de modo que convenzan a sus compañeros (maestro incluido) de que son correctas o razonables.

Así, actividades como la anterior ponen en juego el conocimiento del estudiante y le hacen formar conjeturas, explorar posibles explicaciones y resolver problemas. Esto se optimiza si se tiene el ambiente de aprendizaje propicio.

Ambiente de aprendizaje

La adquisición del conocimiento (o aprendizaje) se da actuando sobre los objetos que se quieren conocer y reflexionando sobre ellos y sus relaciones con otros objetos, éste es el principio que llamamos *aprender haciendo*. Para que el principio sea efectivo, debe tener un ambiente de aprendizaje adecuado en el que el estudiante se sienta a gusto, seguro de sí mismo y parte de la comunidad que se forma en el aula. Lo anterior se logra si se fomentan tres valores fundamentales: tolerancia, respeto y cooperación (Flores y Gómez, 2009).

- Tolerancia. Es la capacidad de aceptar las cosas y las personas por lo que son; con respecto a las personas, asumo que la tolerancia es la capacidad de considerar y, en su caso, aceptar las ideas de los demás; esto lleva a una convivencia armónica en la que se eliminan prejuicios acerca del género, la raza o las preferencias sexuales. La tolerancia y el respeto están en la base de la no discriminación.
- Respeto. Es el reconocimiento del derecho a ser de las cosas, los animales y las personas; con respecto a las personas, se trata del reconocimiento de sus derechos y su dignidad. El respeto implica una actitud de tolerancia y reconocimiento a las personas, la sociedad y la naturaleza. El respeto debe empezar por el propio individuo: respeto a nuestro cuerpo y al entorno que nos rodea. En el aula, el respeto implica que el estudiante se puede expresar libremente, sin temores y con una confianza absoluta de que será escuchado y sus ideas tomadas en cuenta. El respeto y la tolerancia implican un aumento en la autoestima de los estudiantes.

- **Cooperación.** Es el trabajo conjunto para el logro de metas comunes; el objetivo de la cooperación es el beneficio mutuo; en el estudiante, implica la capacidad de hacer de lado sus ideas y propuestas, cuando sea necesario, con el fin de alcanzar los objetivos comunes de aprendizaje propuestos.

Un ambiente de aprendizaje en el aula en donde haya tolerancia, respeto y cooperación se convierte en una comunidad de aprendizaje en la que todos sus integrantes se esfuerzan por lograr un fin común: la adquisición del conocimiento.

El ambiente de aprendizaje debe tomar en cuenta las dimensiones que lo componen (adaptadas de Schoenfeld, y The Teaching for Robust Understanding Project, 2016): contenido curricular; demanda cognitiva; acceso equitativo al contenido; identidad y pertenencia; y retroalimentación formativa.

- **Contenido Curricular.** Se refiere a la temática, los aprendizajes, las estrategias de aprendizaje y los objetivos contemplados en el currículo; debe estar acorde con el nivel educativo del que se trate. En un buen ambiente de aprendizaje, las actividades contribuyen al desarrollo de los estudiantes como pensadores reflexivos, flexibles y con recursos teóricos para afrontar las situaciones a las que se enfrenten. Un currículo matemático en el que las actividades están muy dirigidas y los estudiantes sólo cumplen con instrucciones y órdenes, y en el que hay poco espacio para la discusión, el análisis, la exploración y la reflexión no contribuye a un buen ambiente de aprendizaje.
- **Demanda Cognitiva.** Se refiere al grado de complejidad con que se deben manipular la información y los conceptos disciplinares en las actividades de aprendizaje. La demanda cognitiva de las actividades debe ser tal que signifiquen un reto para el estudiante sin llegar a ser algo imposible de llevar a cabo. No es lo mismo pedir que se despeje la incógnita de la ecuación $5x + 30 = 200$, que preguntar: ¿en cuánto tiempo se llena un tanque de 200 litros si se empieza a llenar a razón de 5 litros por minuto, tomando en cuenta que tiene 30 litros al comenzar a llenarse? Y pedir una explicación de por qué se cree que la respuesta es correcta. Parte de un buen ambiente de aprendizaje

sería aquel en el cual la demanda cognitiva de las actividades fuera la adecuada al nivel educativo y el esfuerzo cognitivo de los estudiantes para realizarla fuera mínimo.

- **Acceso Equitativo al Contenido.** Se refiere a las oportunidades de aprendizaje que tienen los estudiantes en el aula. Un ambiente de aprendizaje equitativo debe permitir y fomentar la participación activa de todos los estudiantes en las actividades de aprendizaje. El trabajo en equipo ayuda en mucho a establecerlo, así como la supervisión continua del profesor. Un ambiente de aprendizaje equitativo deja de lado prejuicios concernientes a género, raza, religión o preferencia sexual, y da voz a todos los integrantes de la comunidad; la tolerancia, el respeto y la cooperación son sus mayores valores en la convivencia de sus integrantes.
- **Identidad y Pertenencia.** Se refiere al grado en que un estudiante se siente identificado con el ambiente de aprendizaje y parte de la comunidad conformada por el grupo. Parte de esta identidad tiene que ver con la concepción del estudiante sobre sí mismo como un buen aprendiz, dispuesto a compartir su conocimiento con los otros estudiantes y a recibir ideas y comentarios de otros aprendices como él. El ambiente de aprendizaje debe fomentar la autoestima del estudiante y su capacidad como aprendiz afectivo.
- **Retroalimentación Formativa.** Se refiere a las actividades de evaluación y a la información que el profesor lleva al aula como productos de una evaluación. Los resultados de la evaluación en el aula sirven, en parte, para identificar errores y debilidades en el aprendizaje, la retroalimentación formativa sirve para eliminar debilidades y corregir los errores mediante lo que denominamos intervenciones de retroalimentación (Gómez, 2017).

En un ambiente fundamentado en una didáctica centrada en el aprendizaje, uno de los papeles que asumiría el profesor sería como organizador de un ambiente de aprendizaje que tome en cuentas estas cinco dimensiones, y busque un cierto equilibrio entre éstas (no privilegiar una o unas por encima de las otras): en este sentido hablo cuando menciono que el papel del profesor cambia para convertirse en un organizador, diseñador y evaluador de actividades de aprendizaje.

El papel de la evaluación

La evaluación en una didáctica centrada en el aprendizaje adquiere un papel crucial en la mejora del desempeño del estudiante. Concibo la evaluación como el proceso de obtención de evidencias sobre el aprendizaje con el fin de mejorarlo y fomentarlo. Para que la evaluación sea más efectiva se debe tomar en cuenta la manera en que el ser humano adquiere su conocimiento en el seno de una sociedad, es decir, en términos del desarrollo de su pensamiento reflexivo.

Para el profesor, la evaluación debe ser un indicador de la efectividad de las actividades de aprendizaje que propone al grupo, de la pertinencia del currículo que está poniendo en marcha y del desarrollo del aprendizaje del estudiante. La retroalimentación formativa es una parte importante de la evaluación del profesor.

Para el estudiante la evaluación será una oportunidad para corregir errores y actitudes, para mostrar el grado de adquisición de su conocimiento y para afianzar su autoestima. El sentido de identidad como un aprendiz efectivo y de pertenencia a la comunidad de aprendizaje en que se conformó el grupo es resultado de una evaluación positiva del estudiante sobre sus propios desarrollo y desempeño.

Un aspecto importante de la evaluación del aprendizaje que hace el profesor tiene que ver con la retroalimentación formativa. La retroalimentación formativa llega al aula como *intervenciones de retroalimentación* que son la serie de actividades, presentaciones y ejercicios encaminados a eliminar los errores detectados durante las actividades de aprendizaje.

La puesta en práctica de estas intervenciones lleva, en el mediano plazo, a mejorar ediciones posteriores del mismo curso y, a largo plazo, a sugerir cambios en el currículo. Esto es, la retroalimentación formativa se convertiría en la base para realizar las revisiones y los cambios curriculares con propuestas surgidas directamente del aula; en contraposición al proceso actual en el que las reformas curriculares son hechas a sugerencia de organismos internacionales o por iniciativa de las autoridades gubernamentales. Para que esto sea realmente efectivo, es necesario que la labor docente deje de ser una actividad aislada y se lleve a cabo en colegiados de profesores de la misma materia o de materias distintas).

Como algo secundario, la evaluación dará información para asignar una nota o calificación al estudiante, y la comunidad tendría voz y voto en la asignación de tales notas, no es sólo el profesor quien decide si el estudiante ha aprendido y tiene derecho a seguir en cursos posteriores

Reflexiones finales

La pedagogía es el cuerpo de conocimiento que se encarga del estudio de los fenómenos educativos; mientras que la didáctica es el conjunto de métodos, técnicas y estrategias encaminadas a mejorar la educación escolar del estudiante a través de la docencia.

En un afán por simplificar (y desenredar lo enredado) considero que un educador, un profesor, un maestro o un docente (prefiero no utilizar el término instructor) es todo profesional que se dedique a mejorar la educación en un ámbito escolar. No debe haber distinciones entre ellos. Un buen docente, sin importar el nivel educativo en el que se desempeñe, es aquel que siempre busca mejorar su docencia mediante el estudio, la investigación y el trabajo colegiado.

Lo que se ha dado por llamar *Matemática Educativa* no es otra cosa que la investigación educativa en el ámbito del aprendizaje de la matemática; investigación que aporta conocimiento sobre los fenómenos educativos en el área (pedagogía) y sobre formas de aprender matemática en el aula (didáctica). Y no debemos confundir educación matemática con didáctica de la matemática. Es decir, no existe (o no debiera existir) un cuerpo de conocimiento llamado *Matemática Educativa*; y deberíamos utilizar correctamente términos como *educación matemática*, *didáctica matemática* y *pedagogía*.

En la actualidad, el sistema educativo ha servido para aleccionar al estudiante y prepararlo para obedecer las reglas sin someterlas al escrutinio del pensamiento reflexivo (instruir al estudiante), cuando la escuela debería ser el conducto por medio del cual la sociedad prepara a sus integrantes para servirla y mejorarla; la escuela debe ser el vehículo por el que el ser humano se integra a la sociedad (se humanice). Por tanto, si se quieren fomentar los valores de una verdadera democracia que nos lleve a un régimen social de convivencia pacífica y desarrollo

armónico, tanto la pedagogía como la didáctica deberían estar encaminadas al logro de tales objetivos dentro y fuera de la escuela. La escuela debe contribuir a la humanización de los individuos, no instruirlos ni domesticarlos.

Es posible lograr lo anterior si cambiamos el paradigma de didáctica centrada en la enseñanza-aprendizaje por una didáctica centrada en el aprendizaje (hablar de una didáctica centrada en el profesor o en el estudiante no tiene sentido, pues toda didáctica se centra en el estudiante: el aprendizaje del estudiante es el objetivo último de toda didáctica), en la que el grupo escolar se convierte en una comunidad de aprendizaje con un objetivo común: el aprendizaje del conocimiento propuesto en el currículo.

¿Cómo se traduce esto en el contexto de la educación matemática?

Si el ser humano aprende mediante sus acciones y la reflexión sobre tales acciones, entonces, en la escuela, el estudiante debe manipular los objetos matemáticos y reflexionar sobre sus acciones y descubrimientos. El profesor es el organizador del ambiente de aprendizaje y el mediador entre el conocimiento y su aprendizaje. Su papel no es enseñar el conocimiento, sino propiciar la reflexión sobre lo que se hace, esta reflexión es la que lleva al conocimiento. La evaluación debe servir para obtener evidencias de lo aprendido con el fin de mejorar los aprendizajes, nunca debe tener un carácter punitivo o ser motivo de chantaje.

El conocimiento es útil en la medida en que es aceptado por los demás y ayuda a entender la realidad y a resolver problemas. Por tanto, las acciones y las reflexiones en el aula deben hacerse de manera colectiva, ya sea en equipos pequeños o en sesiones plenarias. De manera individual, cada estudiante decide si el fragmento de conocimiento analizado y discutido es útil o no, o si debe considerarlo en el futuro (el aprendizaje, a fin de cuentas, es un acto privado; Juárez, 2015).

El análisis y el estudio de los objetos matemáticos y sus relaciones, en el ámbito escolar, contribuyen en gran medida al desarrollo del pensamiento matemático, considerado como una manifestación del pensamiento reflexivo. Mediante actividades de formación de conjeturas y su validación, el estudiante será capaz de desarrollar sus esquemas de argumentación y, en consecuencia, tendrá elementos

para realizar demostraciones matemáticas, pero también tendrá elementos para abordar problemas y situaciones fuera de la matemática que le darían mayores recursos para tomar decisiones.

Una comunidad de aprendizaje eficiente se basa en tres principios o valores fundamentales: tolerancia, respeto y cooperación. Valores que son esenciales para convivir de manera pacífica, democrática y equitativa. Los estudiantes que trabajan en un ambiente con estas características se sienten seguros y acogidos por su comunidad y, por consiguiente, es más probable que aprendan.

Para que toda docencia sea efectiva, y en particular aquella sustentada en una didáctica centrada en el aprendizaje, es necesario tener una planeación didáctica conjunta y hacer trabajo colegiado; de este modo, el quehacer docente dejaría de estar aislado y se trabajaría en el diseño de estrategias de aprendizaje comunes. Esta labor conjunta se enriquecería mucho más si el trabajo colegiado está hecho por profesores de las materias que conforman el currículo, y si el mismo currículo se diseña tomando en cuenta necesidades comunes de todas las materias. De este modo es posible que todos avancen en la dirección propuesta y no suceda, como es el caso en la mayoría de las escuelas, que cada profesor tire en una dirección distinta y, en vez de avanzar, sólo se camine en círculos sin llegar a ningún lado. En muchas ocasiones lo que un profesor avanza en un cierto curso lo deshace el profesor del siguiente.

La investigación educativa en el aula, junto con la experiencia del profesor, debería ser el motor (o uno de los motores) que ponga en marcha el aprendizaje de nuestros estudiantes en todos los niveles; la instrumentación de una didáctica centrada en el aprendizaje, vía la evaluación en el aula y la retroalimentación formativa, sería la base para que el propio docente haga la investigación necesaria y deje de ser el *técnico* que aplica los resultados y las recomendaciones hechas por terceros; muchas veces son recomendaciones hechas por personas que nunca han pisado un aula de clase del nivel en el que se hacen dichas sugerencias.

Me atrevo a afirmar que la mayoría de las investigaciones educativas se hacen en el contexto de un posgrado en educación y sólo han servido para que se obtenga

un grado o para que el asesor del trabajo obtenga créditos que lo posicionen mejor como investigador (un nivel más alto en el Sistema Nacional de Investigadores, si hablamos de la situación en México) y obtenga una mejor remuneración y mayor prestigio; es decir, tiene un valor utilitario.

El principal obstáculo para instrumentar una didáctica centrada en el aprendizaje ha sido la resistencia de la mayoría de los docentes con los que he interactuado; no conciben, o no les convence, un aprendizaje sin la mediación de su enseñanza. Es muy difícil abandonar nuestra zona de comodidad y adentrarse en los terrenos pantanosos de lo nuevo y lo desconocido. En este sentido se vuelve imperativo un programa de formación docente que tome en cuenta los principios de la didáctica centrada en el aprendizaje, y que los esfuerzos hechos por unos pocos no se vean opacados por la enseñanza tradicional, disminuyendo sus probabilidades de éxito a casi cero.

Como dijo alguna vez un buen colega uruguayo:

¡Es bárbaro lo que los gurises pueden hacer si vos los dejás, che!

Bibliografía

- Arteaga, B. y Macías, J. (2016). *Didáctica de las Matemáticas en Educación Infantil*. España, Universidad Internacional de la Rioja.
- Brizuela, P. (2013). *La resolución de problemas de reparto a través del trabajo colaborativo*, Tesis de Maestría en Educación Básica, Veracruz, Universidad Pedagógica Veracruzana México).
- Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*, Dordrecht, Kluwer.
- Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2003). Matemática Educativa: una visión de su evolución, *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*. Vol 6, núm. 1, pp.27-40.
- Chevallard, Y. (1985). *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado*. Argentina: Aique.

-
- Dewey, J. (1910). *How we think*. Estados Unidos de América, D. C. Heath & co. Publishers.
- Engels, F. (1878). *La revolución de la ciencia de Eugenio Dühring (Antidürring)*. Tomado de la edición en español de 2003, Marxist Internet Archive (Recuperado el 2 de febrero de 2019 de: <https://www.marxists.org/espanol/m-e/1870s/anti-duhring/>).
- Flores, Á. H. (2007). *Prácticas Argumentativas y Esquemas de Argumentación en Profesores de Matemáticas del Bachillerato*, Tesis de Doctorado, Ciudad de México, Cinvestav-IPN (México).
- Flores, Á. H. (2017). Pensamiento Matemático y el Quehacer Científico, *Pädi: revista de proyectos y textos académicos de didáctica de las ciencias y la ingeniería*, año 1, núm. 001, pp. 27-39. Universidad Autónoma de Querétaro.
- Flores, Á. H. y Gómez, A. (2009). "Aprender Matemática, Haciendo Matemática: la evaluación en el aula" *Educación Matemática*, vol. 21, núm. 2, pp. 117-142.
- Franco, M. A. (2012). *Pedagogia e prática docente*, Brasil, Cortez Editora.
- Gómez, A. (2017). *Retroalimentación Formativa en el Aula de Matemática: Proyecto de Investigación de Doctorado*, Proyecto en desarrollo, CICATA-IPN.
- Ibáñez, C. (2007). "Un análisis crítico del modelo del triángulo pedagógico: una propuesta alternativa", *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, vol 12, núm. 032, pp. 435-456.
- Juárez, F. (2015). *Epistemología del aprendizaje, apuntes para una pedagogía persuasiva*, México, UPN.
- Houssaye, J. (1988). *Triangle pédagogique: théorie et pratiques de l'éducation scolaire*. Suiza, Editions Peter Lang.
- Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations: the logic of mathematical discovery*, UK, Cambridge University Press.
- Merriam-Webster (1993). *Merriam Webster's Collegiate Dictionary*, Décima edición, Estados Unidos de América, Merriam-Webster, Inc.

-
- Nieto, N., Viramontes, J. de D. y López, F. (2009). ¿Qué es matemática educativa?, *Culcyt/Educación Matemática*. año 6, núm. 35, pp. 16-21.
- Peirce, C. S. (2014). *Illustrations of the logic of science*, Waal de, Cornelis (ed), Estados Unidos de América, Open Court.
- Schoenfeld, A. & The Teaching for Robust Understanding Project (2016). An Introduction to the Teaching for Robust Understanding (TRU) Framework. Berkeley, CA: Graduate School of Education. (Recuperado el 20 de marzo de 2018 de: <http://tru.berkeley.edu>).
- SUMEM (2014). *Consideraciones para la Mejora de la Educación Matemática en la UNAM*, Facolni, M. J., Flores, Á. H. y Hernández, M. (eds), México, Secretaría de Desarrollo Institucional-UNAM.
- Vidal, R. (2016). La Didáctica de las Matemáticas y la Teoría de las Situaciones. (Recuperado el 28 de marzo de 2018 de: <https://educrea.cl/wp-content/uploads/2016/01/DOC-La-Didactica.pdf>).