

# CONCEPTUALIZACIÓN DEL PAPEL DE LAS COMPETENCIAS, EL SABER Y EL CONOCIMIENTO EN INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA<sup>1</sup>

Mogens Niss, Regina Bruder, Nuria Planas  
Ross Turner y Jhony Alexander Villa-Ochoa<sup>2</sup>

Traducción del inglés por A. Homero Flores.

## RESUMEN

En este artículo se exploran las nociones, la conceptualización y los roles de las competencias matemáticas y sus relaciones en la investigación, el desarrollo y la práctica, desde una perspectiva internacional. Después de plantear las preguntas que dieron pie a esta exploración, primero echamos una breve mirada a la génesis de las ideas orientadas por competencias como preludeo a la identificación y al análisis de las tendencias recientes. Se analiza la relación entre varias nociones y términos referentes a las competencias y las nociones relacionadas; y se presentan sus roles en el marco PISA 2015. Se analizan dos tipos de investigación: sobre competencias matemáticas y mediante competencias matemáticas. Se esboza el impacto de las nociones y las ideas sobre competencias en los marcos y los documentos curriculares en varios países, antes de identificar los desafíos de la instrumentación de tales nociones en la práctica real de enseñanza. Finalmente, se hace una evaluación del estado actual de las nociones de competencias y nociones parecidas en el ámbito internacional, con especial atención a la necesidad de llevar a cabo más investigación.

**Palabras Clave:** Competencias matemáticas; Destreza matemática; Prácticas matemáticas; Alfabetización matemática, Estándares educativos; PISA; Capacidades matemáticas fundamentales.

---

<sup>1</sup> Versión editada y condensada del informe integral del Equipo de Investigación: Niss, Bruder, Planas, Turner y Villa-Ochoa.

<sup>2</sup> M. Niss (&)

Roskilde University, Roskilde, Denmark  
e-mail: mn@ruc.dk

R. Bruder

Technische Universität, Darmstadt, Germany  
e-mail: r.bruder@math-learning.com

N. Planas

Universitat Autònoma de Barcelona, Bellaterra, Spain  
e-mail: nuria.planas@uab.cat

R. Turner

Australian Council of Educational Research, Camberwell, VIC, Australia  
e-mail: ross.turner@acer.edu.au

J.A. Villa-Ochoa

Universidades de Antioquia, Medellín, Colombia  
e-mail: jhony.villa@udea.co

© The Author(s) 2017

G. Kaiser (ed.), Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education, ICME-13 Monographs, DOI 10.1007/978-3-319-62597-3\_15

## **INTRODUCCIÓN: ¿CUÁLES SON LAS CUESTIONES?**

A pesar del título de esta exploración, centrada principalmente en la investigación, los autores también creen necesario considerar las competencias, los saberes y el conocimiento como parte del desarrollo y de la práctica de la educación matemática. Esto es porque estas nociones son medulares en todos los aspectos de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. De hecho, cualquiera que esté involucrado en actividades de educación matemática debería hacerse la pregunta fundamental:

*¿Qué significa dominar la matemática?*

Y varias más relacionadas, como: ¿qué significa poseer conocimiento de matemática, saber matemática, tener visión en matemática?, ¿qué significa ser capaz de hacer matemática, tener competencia (habilidad) matemática, ser versado en prácticas matemáticas?

Estas preguntas reflejan varias facetas del título del Equipo de Investigación. Las primeras tres se centran en productos matemáticos (conceptos, definiciones, reglas, teoremas, fórmulas, métodos y hechos históricos) que se han acumulado en la mente del “conocedor”. La cuestión educativa que corresponde a estas preguntas es: ¿qué tiene que hacer un aprendiz para volverse un conocedor de matemática? Las últimas tres preguntas corresponden a la práctica matemática, es decir, a lo que implica el desarrollar procesos matemáticos característicos. La cuestión educativa correspondiente es: ¿qué tiene que hacer un aprendiz para volverse un *hacedor* de matemática?

“Saber” y “ser capaz de hacer” son cosas diferentes. Sin embargo, diremos que las relaciones y el equilibrio entre ellas son íntimos y delicados. A menudo, ni las preguntas iniciales de este artículo ni su respuesta se plantean explícitamente en documentos oficiales ni en otros escritos sobre educación matemática. Así, resultaría natural preguntarse: ¿por qué son importantes? Bueno, son importantes porque su respuesta, explícita o no, determina al menos tres componentes medulares de la educación matemática:

- Los propósitos y las metas de la educación matemática (¿qué deseamos lograr?)
- Los criterios para el éxito y el grado de éxito en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática (¿cómo podemos saber si hemos logrado lo que queremos y qué tan bien lo hemos hecho?)
- La estructura y la organización de la enseñanza de la matemática (actividades de profesores y de estudiantes, así como el marco de referencia y los materiales para enseñar y aprender).

Respuestas marcadamente diferentes a las preguntas iniciales dan lugar a marcadas diferencias en la comprensión de estos componentes. De hecho, la diversidad en la educación matemática en varias partes del mundo puede, en gran medida, explicarse por la diversidad de respuestas dadas a la pregunta principal: ¿qué significa dominar la matemática?

## **RESPUESTAS A LA PREGUNTA PRINCIPAL**

### *Excursión Histórica*

Empecemos con una breve excursión histórica. Clásicamente, la pregunta principal fue respondida especificando el contenido matemático, incluyendo hechos que la gente debería saber y las habilidades procedimentales asociadas que se deberían tener. Por ejemplo, en el currículo nacional danés para el nivel medio superior de 1935 se especificaban con gran detalle 38 contenidos y las habilidades procedimentales asociadas con ellos; y también se especificaba con considerable detalle la estructura y el contenido de los exámenes finales orales y escritos. Sin embargo, tales concepciones sobre lo que significa dominar la matemática pronto fueron atacadas.

Así, en el muy citado Spens Report (*Informe Spens*, Board of Education, 1938), publicado en el Reino Unido, se sugería que no se ignoraran las “considerables verdades en las que la Matemática apoya a importantes actividades y aventuras del hombre civilizado... (*considerable truths in which Mathematics subserves important activities and adventures of civilised man. [... ]*) ...creemos que la Matemática escolar estará bien consolidada solo cuando los profesores estén de acuerdo en que debería ser enseñada como el arte, la música y la Ciencia Física, porque es una de las principales líneas que el espíritu creativo del hombre ha seguido en su desarrollo” (pp. 176-177).

He aquí otra voz, la de Georges Polya quien, en el prefacio de la primera edición (1945) de *How to solve it* (publicada en español con el título ‘Cómo plantear y resolver problemas’), escribió:

*Si [el profesor de matemática] llena su tiempo taladrando a sus estudiantes con operaciones de rutina, matará su interés, impide su desarrollo intelectual y desperdicia sus oportunidades. Pero si desafía la curiosidad de sus estudiantes al plantearles problemas proporcionales a su conocimiento y les ayuda a resolver sus problemas con preguntas estimulantes, puede darles una probada de pensamiento independiente y algunos de sus significados (citado de la edición de 1957)*

En el primer estudio IEA sobre logro matemático (1964-1967), precursor de los estudios TIMSS, se enlistaron *cinco niveles de comportamiento cognitivo* como componentes del logro matemático, entre éstos se incluye el conocimiento del contenido. Los tres últimos niveles fueron: (a) *traducción de datos a símbolos o a esquemas y viceversa*; (b) *comprensión: capacidad de analizar problemas, de seguir razonamientos*; y (c) *inventiva: razonar creativamente en matemática* (Husén, 1967).

Seymour Papert, inventor del lenguaje computacional educativo, LOGO, escribió en 1972 (pp. 249-250):

*Ser matemático no es otra cosa que ‘saber’ un conjunto de hechos matemáticos, del mismo modo que ser poeta no es otra cosa que saber un conjunto de hechos lingüísticos. [...] ser matemático, de nuevo como ser poeta, o compositor o ingeniero, significa hacer más que conocer o entender [...] Al volverse matemático, ¿uno aprende algo diferente y más general que el contenido específico de temas matemáticos particulares? ¿Existe algo así como una Forma Matemática de Pensar? ¿Puede ésta aprenderse y enseñarse? (cursivas en el original).*

Estas citas apuntan a facetas de la matemática diferentes a una materia sistemáticamente organizada, conocimiento fáctico de contenido y habilidades procedimentales, apuntan a procesos matemáticos significativos. Así, históricamente, nos enfrentamos con conceptualizaciones bastante diferentes de lo que significa dominar la matemática, como:

- Enfocarse, principalmente, en el conocimiento y el entendimiento del contenido, por ejemplo, definiciones, conceptos, teoremas y estructuras teóricas;
- enfocarse, principalmente, en habilidades pertenecientes a procedimientos y técnicas algorítmicas;
- enfocarse, principalmente, en la aplicación de la matemática, es decir, trabajar la matemática (o a través de ella) en contextos intra y extra matemáticos, especialmente en resolución de problemas;
- enfocarse, principalmente, en un pensamiento matemático general y en la matemática como parte de la cultura humana, como el arte o la ciencia.

Ninguno de estos enfoques puede sostenerse solo, y no se contradicen.

Cuando la gente piensa que son contradictorios, surgen controversias inútiles, véanse las guerras matemáticas en algunos países (sic: *the math wars in some countries*). Por el contrario, estos enfoques representan énfasis mutuamente dependientes. Sin embargo, existen equilibrios que se deben mantener entre ellos.

### *Tendencias Recientes*

A continuación, nos adentraremos en algunas tendencias que, desde la década de 1980, han puesto el énfasis en la aplicación de la matemática.

El Consejo Nacional de Profesores de Matemática (NCTM, por sus siglas en inglés) de Estados Unidos asumió el liderazgo al abrir nuevos caminos significativos en este sentido. Ya en su Agenda para la Acción: recomendaciones para la Matemática Escolar de 1980, recomendaba, entre otras cosas, que “la resolución de problemas debe ser el enfoque de la matemática escolar de los ochentas”, que “las habilidades básicas en matemática deben definirse de modo que abarquen más que la habilidad computacional” y que “el éxito de los programas de matemática y del aprendizaje del estudiante debe ser evaluado mediante una amplia gama de medidas diferentes a las pruebas convencionales” (p. 1).

Los altamente influyentes *Estándares Curriculares y de Evaluación para la Matemática Escolar* (1989) del NCTM, establecieron las siguientes metas para todos los estudiantes, desde jardín de niños hasta el grado 12: (1) que aprendan a valorar la matemática; (2) que adquieran seguridad en su habilidad para hacer matemática; (3) que se conviertan en solucionadores de problemas; (4) que aprendan a comunicarse matemáticamente; y (5) que aprendan a razonar matemáticamente. (p. 5). A partir de estas metas se derivaron cuatro estándares para la matemática en todos los grados: *Matemática como resolución de problemas, matemática como comunicación, matemática como razonamiento y conexiones matemáticas*. Los estándares de 1989 dieron lugar a las Guerras de la Matemática en

Estados Unidos en la década de 1990, debido a que los opositores mantenían puntos de vista diferentes sobre lo que significa la matemática y el entenderla. Éste fue uno de los grandes factores subyacentes a la publicación de los Principios y Estándares para la Matemática Escolar de la NCTM (2000), en los que se conservaron los estándares globales para todos los niveles escolares, además de agregarse uno más, *representaciones*, al tiempo que se omitieron aspectos actitudinales y de disposición.

Concepciones similares se dieron e instrumentaron en Australia desde la década de 1980. Así, en la Declaración Nacional sobre la Matemática para las Escuelas Australianas (1990) se puso el énfasis tanto en los productos como en los procesos matemáticos, incluyendo patrones de observación, representación e investigación en fenómenos sociales y físicos, y entre objetos matemáticos, con un enfoque en el pensamiento y el modelado matemáticos. El documento Matemática: un perfil curricular para las Escuelas Australianas (1994) se enfoca en lo que significa trabajar matemáticamente: ‘investigando’, ‘conjeturando’, ‘usando estrategias de resolución de problemas’, ‘aplicando y verificando’, ‘usando lenguaje matemático’ y ‘trabajando en contexto’.

En el danés KOM Project (Niss y Jensen, 2002; Niss, 2003) se desarrolló el concepto de capacidad matemática y de competencias matemáticas, definidas como:

*“Poseer capacidad (competence) matemática significa tener conocimiento sobre la matemática, entenderla, ejercitarla, aplicarla, relacionarla y juzgarla; y sobre la actividad matemática en una multitud de contextos que, de hecho, implican el uso de la matemática o potencialmente podrían implicarla”, mientras que las competencias (competency) matemáticas son el principal constituyente de la capacidad matemática: “una competencia matemática es la disposición, basada en el conocimiento, para actuar premeditadamente en situaciones que plantean un tipo particular de reto matemático” (p. 43). En el proyecto se identifican ocho de tales competencias y se les representan mediante la llamada ‘flor de competencias’ (Fig. 1).*

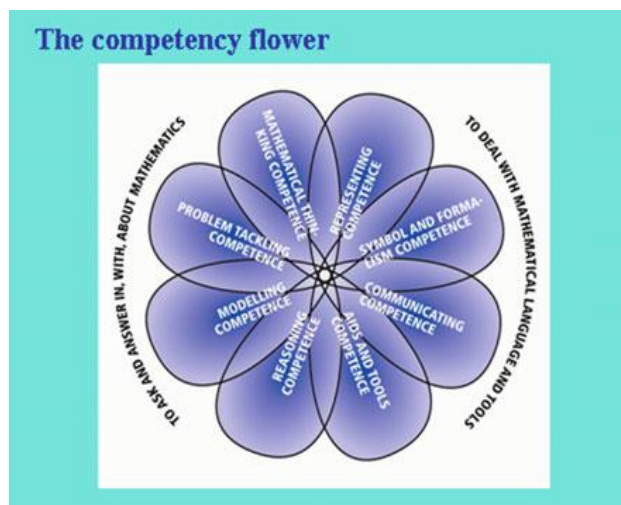


Figura 1. Flor de Competencias.

Casi al mismo tiempo, pero de manera independiente del Proyecto KOM, proyectos en Estados Unidos trabajaban siguiendo líneas similares. El proyecto del Consejo Nacional de Investigación (NRC, por sus siglas en inglés), *Sumando: Ayuda a los Niños a Aprender Matemática* (2001), y el *Panel de Estudio en Matemática RAND* (2003) adoptaron el término *destreza matemática* (mathematical proficiency) y se adoptaron cinco aspectos que se interconectan: ‘entendimiento conceptual’, ‘fluidez procedimental’, ‘capacidad

estratégica', 'razonamiento flexible' y 'disposición productiva' (p. 116). Para el equipo del NRC esta concepción capta lo que se cree que "es lo necesario para *aprender* matemática de manera exitosa" (las cursivas son nuestras), mientras que para el Panel RAND capta "lo que significa ser *competente* en matemática" (las cursivas son nuestras). El Panel RAND también introdujo la noción de *prácticas matemáticas*:

Porque la pericia en matemática [...] implica más que sólo poseer cierta clase de conocimiento, recomendamos [...] enfocarse explícitamente en el *saber-como* matemático: lo que los matemáticos y los hacedores de matemática exitosos hacen. Nos referimos a lo que hacen como prácticas matemáticas (p. 29).

Esta noción fue desarrollada aún más en la Iniciativa de Estándares Estatales de Núcleo Común (Common Core State Standards Initiative, 2012) de Estados Unidos, en la que se identifican ocho prácticas matemáticas: "Entender los problemas y perseverar en su resolución. Razonar de manera abstracta y cuantitativa. Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros. Modelar con matemática. Usar herramientas apropiadas de manera estratégica. Poner atención en la precisión. Buscar estructuras y usarlas. Buscar regularidades en el razonamiento repetido y expresarlas (pp. 1-2)"

Ahora hemos visto que varias personas, cuerpos y organismos han sentido la necesidad de insistir en que el dominio de la matemática va más allá de poseer un conocimiento disciplinar y habilidades procedimentales. Implica también la aplicación de la matemática en un sentido amplio y comprehensivo. Existen similitudes significativas entre las conceptualizaciones de la aplicación matemática, pero también hay diferencias características, no sólo en lo que a terminología se refiere, sino también con respecto a la visión de las nociones, por ejemplo, con respecto al papel de los aspectos actitudinales, de disposición y volitivos.

### **Competencias matemáticas (y sus parientes)**

Obviamente, nociones generalizadas como 'alfabetización matemática', 'numeralidad', 'alfabetización cuantitativa', 'capacidad/competencias matemática' y (¡sí!) 'matemática' están relacionadas, aunque no son idénticas. ¿Cómo podemos caracterizar las relaciones entre ellas, por ejemplo, mediante un diagrama de Venn? Desde luego, no hay una única representación de estas relaciones. Percibimos que las 'competencias matemáticas' engloban a la 'alfabetización matemática', que a su vez incluye a la 'alfabetización cuantitativa' (término usado en Estados Unidos) y a la 'numeralidad' (término usado en Inglaterra y Australia). Todos se ven intersecados por la disciplina 'matemática' con sus dos facetas: 'productos matemáticos' y 'procesos matemáticos'. Por tanto, la 'matemática' como disciplina no es un subconjunto de las 'competencias', la 'alfabetización' o la 'numeralidad'.

Una cuestión relacionada con lo anterior, es qué es lo que deberíamos valorar y resaltar en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, considerando, por ejemplo, la siguiente lista de posibles elementos: 'pensar matemáticamente', 'habilidades prácticas de sobrevivencia', 'sentido numérico', hacer matemática', 'modelado, matematización', 'lo que hacen los matemáticos', comunicación, entendimiento, expresión matemáticas',

‘razonamiento matemático’, ‘algoritmos y procedimientos matemáticos’, ‘extracción y definición de problemas de los ámbitos laboral, de la vida, del mundo’, ‘conclusiones a partir de datos’, ‘definiciones, teoremas, demostraciones’, ‘aplicación de la matemática en contexto’, ‘apreciación cultural (naturaleza, historia y papel de la matemática)’.

Estos elementos juegan papeles muy diferentes y son evaluados de manera muy distinta dependiendo del contexto. Uno de tales contextos es la noción de alfabetización matemática definida en PISA, citada aquí del marco de referencia de 2015:

*La alfabetización matemática es la capacidad de un individuo de formular, emplear e interpretar la matemática en una variedad de contextos. Incluye razonar matemáticamente y utilizar conceptos, procedimientos, hechos y herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos. Asiste a los individuos a reconocer el papel que juega la matemática en el mundo; y a tener juicios y tomar decisiones bien fundadas, necesarias para el desempeño de ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos (p. 5).*

Así, los componentes clave en PISA son ‘formular’, ‘emplear’ e ‘interpretar’ que son simplemente códigos del modelado matemático. La matemática PISA no explicita el uso de la noción de competencias matemáticas en el sentido del Proyecto KOM, sino de la noción derivada de ‘capacidades matemáticas fundamentales’ que toman en cuenta las realidades de una evaluación internacional en la cual los elementos tienen que ser

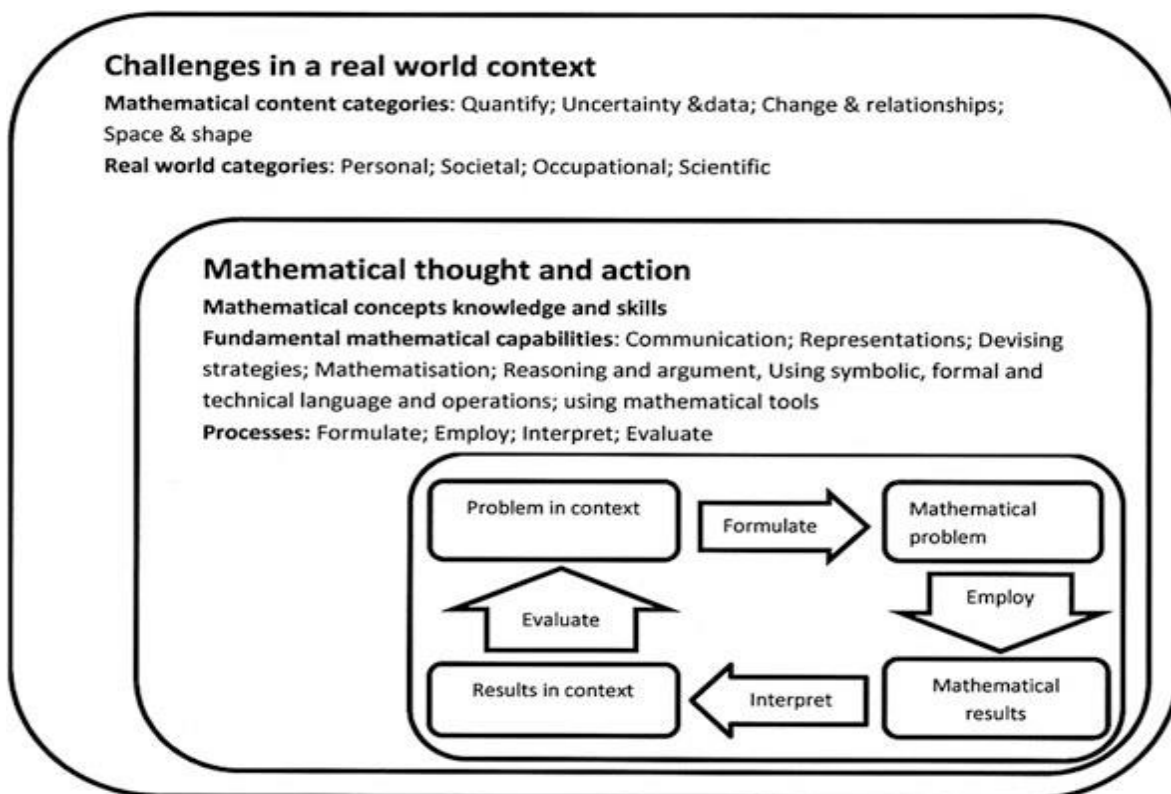


Figura 2. Elementos principales de PISA, 2015.

separables con el fin de ser medibles. En la Figura 2 se presenta un diagrama sumario de los elementos de PISA.

## **Aspectos de la Investigación Concernientes a las Competencias Matemáticas**

Existen dos tipos de investigación en competencias matemáticas. El primer tipo tiene a las competencias como su principal objeto de investigación. El segundo tipo emplea las competencias como un medio esencial de investigación para algún otro propósito. Ambos tipos implican tanto investigación teórica como empírica. Ya que no es posible hacer justicia al enorme cuerpo de investigación en el campo, nos hemos limitado a delinear algunos temas selectos.

Con respecto a las competencias matemáticas como objeto de investigación, mucho de lo que se ha investigado (con perspectivas teóricas como parte integral) tiene que ver con varias nociones de capacidad/competencia y la especificación de sus componentes y facetas. ¿Las nociones son de una naturaleza puramente cognitiva o incluyen también elementos de disposición y afectivos? ¿En qué grado las nociones dependen de la cultura, de situaciones o de niveles o dominios matemáticos, y cómo se relacionan con prácticas matemáticas universales o particulares? Existe también investigación que intenta modelar la estructura del sistema de competencias.

Otro tipo de investigación asume una perspectiva predominantemente empírica del sistema completo de competencias, por ejemplo, con el propósito de sustentar la existencia y la importancia de la noción de competencias, de identificar sus principales dimensiones y su estado de desarrollo en individuos o en grupos, con el objetivo de promover y apoyar tal desarrollo. Se ha puesto particular atención al desarrollo profesional de profesores, enfocándose en su entendimiento de la noción de competencias y en el apoyo y el asesoramiento de profesores.

Otro tipo más de investigaciones se enfocan en las capacidades (competence) individuales. Se ha mostrado que se pueden detectar e identificar de manera empírica capacidades en las actividades matemáticas reales de las personas. Aunque esto con algunas dificultades. Una de tales complicaciones es que las capacidades matemáticas no se desarrollan ni se poseen ni se aplican de manera aislada. Así, en pruebas a menudo es difícil medir exactamente facetas particulares de las capacidades, debido, por ejemplo, a que los problemas a menudo pueden resolverse de maneras muy distintas, apelando a conjuntos muy diferentes de competencias (competency). La resolución de tareas de un solo paso realmente no pueden mostrar la diferencia entre un entendimiento profundo de la matemática y un aprendizaje rutinario de conocimientos y procedimientos. Además, a menudo se dice que las competencias se traslapan (por ejemplo, la resolución de problemas casi inevitablemente utiliza representaciones y el trabajo con símbolos y formalismos). Es importante observar que mucha investigación se ha hecho, también en el pasado (sic), sobre capacidades individuales (por ejemplo, resolución de problemas, modelado, razonamiento, representaciones) sin referirse nunca al término 'competencia'.



Un creciente cuerpo de investigación teórica y empírica utiliza las competencias matemáticas como medio de investigación. Por ejemplo, para sustentar nuevos marcos de referencia o currículos matemáticos, para captar y entender qué sucede en la enseñanza real de la matemática, o para crear ambientes de aprendizaje basados en competencias. Las competencias también son usadas para sustentar el diseño de pruebas, formato de reactivos (ítems) y la interpretación de su dificultad. La identificación y el análisis de entendimientos erróneos también se pueden apoyar con la adopción de una perspectiva de competencias. Lo mismo vale con respecto a las creencias de los profesores y las concepciones de la matemática.

## **Competencias y Currículos Nacionales de Matemática**

Las competencias y sus parientes juegan una variedad de papeles en los currículos nacionales, incluso si en los países se utilizan términos diferentes al de 'competencia'. Como no puede ser nuestra ambición dar una cobertura geográfica de los cerca de 200 países del orbe, hemos elegido un conjunto suficientemente variado de regiones/países para dar una representación justa del espectro de ideas y cuestiones pertenecientes a estas nociones en un contexto curricular.

En España, inspirada por sucesivos marcos PISA, en los Estándares del NCTM de 1989, en la Iniciativa de Estándares Estatales de Núcleo Común (Common Core de Estados Unidos) y en el Proyecto KOM danés, el papel de las competencias matemáticas aparece fuertemente en el papel, pero es débil en términos de una instrumentación y una práctica reales. En el currículo español se utilizan nociones y términos de la intersección de las fuentes internacionales y combinaciones apropiadas de ellos. Así, en España se emplea el término 'sub-competencias', por ejemplo, razonar matemáticamente, planteo y resolución de problemas, modelado y comunicación matemáticos, con uso de la matemática o acerca de la matemática, para referirse a algo que en otros medios se conocen como competencias. Cuando se desarrollan las sub-competencias, se supone que el aprendiz adquiere la habilidad de entender una cadena de razonamientos matemáticos, (re)formular una pregunta como problema matemático, expresarse matemáticamente y trabajar con modelos obtenidos por otros.

Desde la década de 1970, en Portugal se ha ubicado el planteamiento y la resolución de problemas (inicialmente vistas y referidas como habilidades transversales de las áreas de contenido matemático) en el corazón de la educación matemática. Después, el currículo nacional introdujo y usó la noción de capacidad (competence) matemática y estableció el desarrollo de competencias (competency) matemáticas como metas educativas para los niveles escolares primario y secundario. Al igual que en España, los profesores están batallando con la enseñanza de la matemática basada en competencias y con la diversidad de terminología que le rodea. Términos como 'contenido base', 'habilidades básicas', 'competencias básicas', 'competencias esenciales', 'capacidades' se usan en programas de educación de profesores de matemática. En recientes instrumentaciones del currículo se muestra una tensión entre lo que debe y debería ser considerado como 'contenido' y como 'capacidad', junto con debates sobre si es posible reconciliar las dos nociones, mientras se

evita el considerar las capacidades como un medio para tratar con conocimiento de contenido específico.

En América Latina, entre otros, Brasil, Colombia, Costa Rica, Chile, México y la República Dominicana, han experimentado reformas curriculares inspiradas por las ideas orientadas hacia las competencias de PISA. Una idea central en todas estas reformas ha sido el enfoque en el reconocimiento de los aprendices del papel social de la matemática escolar y de la resolución de problemas del mundo real en la vida cotidiana y social. A pesar de las diferencias significativas entre los países, todos ponen el énfasis en el uso funcional de la matemática. El propósito de la educación se define en términos de 'capacidades' (Chile), 'competencias' (México, Colombia y República Dominicana) y 'habilidades' (Costa Rica). Un lugar común es el relacionar el pensamiento matemático con temas y procesos matemáticos específicos (resolución de problemas, razonamiento, comunicación y modelado). Chile, la República Dominicana y México incluyen actitudes en sus nociones, mientras que en Colombia se resaltan los contextos.

En el currículo australiano de 2012, la *numeralidad* se incluye como una de las capacidades generales: Los estudiantes se hacen expertos en *numeralidad* a medida que desarrollan el conocimiento y las habilidades para usar la matemática con seguridad en todas las áreas de aprendizaje en la escuela y, en general, en su vida. La *numeralidad* implica a los estudiantes en el reconocimiento y el entendimiento del papel de la matemática en el mundo y en la disposición y la capacidad de usar el conocimiento matemático y las habilidades premeditadamente. El currículo contiene, además, tres ejes de conocimiento: 'números y álgebra', 'mediciones y geometría' y 'estadística y probabilidad', así como cuatro ejes de dominio (muy cercanos al programa *Sumando, Adding it up*): 'entendimiento, 'fluidez', 'resolución de problemas, incluyendo modelado' y 'razonamiento'.

En Corea, históricamente, el énfasis se ha puesto en el contenido, mientras que hacer matemática se ve como parte del aprendizaje de dicho contenido. En 2001, hubo un corrimiento de enfoque hacia el fortalecimiento de procesos que pueden verse como versiones de las competencias matemáticas: se cree que las capacidades cruciales de los miembros de un futuro complejo, especializado y plural se deben fomentar mediante el aprendizaje y la práctica de procesos matemáticos, incluyendo resolución de problemas, comunicación y razonamiento matemáticos.

Varios países del sudeste de Asia (Brunei Darussalam, Camboya, Indonesia, RPD de Lao, Malasia, Filipinas, Singapur, Tailandia, Timor Oriental, Vietnam) están introduciendo nuevos programas de evaluación regional y sus correspondientes marcos de evaluación. Las definiciones de matemática incluyen un claro enfoque en la conexión del conocimiento conceptual y el procedimental con su aplicación cotidiana, al tiempo que se pone énfasis en metas más amplias en el currículo matemático como 'pensar y razonar matemáticamente' y 'resolución de problemas', haciendo referencia a las competencias matemáticas de varias maneras. Como se considera en Singapur, hacer se concibe como parte de conocer, como se muestra en el bien conocido pentágono regular que tiene 'resolución de problemas matemáticos' en su centro, colocado en el interior del pentágono (sic), mientras que los cinco lados ('conceptos matemáticos', 'procesos', 'habilidades', 'actitudes' y

‘metacognición’) pueden verse como facetas de la resolución de problemas o como sus prerrequisitos.

Las estaciones finales de nuestra excursión por los currículos nacionales son los países germano hablantes de Europa. Como resultado de llamado “impacto PISA” en Alemania en 2000, una multitud de esfuerzos concertados se hicieron para remediar la situación. Un primer resultado fueron los estándares educativos para la matemática acordados por todos los *Länder* (estados) alemanes, en 2003; el núcleo de tales estándares consistió en seis: ‘razonamiento’, ‘resolución de problemas’, ‘modelado’, ‘uso de representaciones matemáticas’, ‘trabajo con aspectos simbólicos, formales y técnicos de la matemática’ (que corresponden bastante con seis de las ocho competencias del Proyecto KOM danés). Estos estándares/competencias están en una estructura tridimensional que tiene cinco áreas de contenido matemático (‘números’, ‘medida’, ‘forma y espacio’, ‘dependencia funcional’ y ‘datos y aleatoriedad’) y tres niveles de dominio, como en los primeros marcos de PISA (‘reproducción’, ‘establecimiento de conexiones’ y ‘generalización y reflexión’), como las otras dos dimensiones. En Austria, también se ha adoptado un modelo tridimensional, bastante complejo, de procesos (‘representación’, ‘construcción de modelos’, ‘operación’, interpretación, ‘razonamiento’), áreas de contenido (‘números y medidas’, ‘variables’, ‘dependencias funcionales’, ‘figuras y sólidos geométricos’, ‘representaciones y descriptores estadísticos’) y, finalmente, tres niveles de dominio (‘activación de conocimiento y habilidades básicos’, ‘creación de conexiones’, ‘activación de conocimiento reflexivo’). En Suiza, en 2007, se adoptó un marco nacional inspirado por los estándares del NCTM, PISA y los estándares educativos alemanes, para armonizar la educación escolar obligatoria en todos los cantones. El marco de referencia está basado en ocho aspectos fundamentales de la acción matemática (‘conocer, comprender y describir’, ‘operar y calcular’, ‘emplear instrumentos y herramientas’, ‘representar y comunicar’, modelar y matematizar’, ‘razonar y justificar’, ‘interpretar y reflexionar sobre los resultados’, ‘investigar y explorar’), combinados con contenido matemático en una estructura matricial para cada uno de los grados 4, 8 y 11.

Como puede verse, los tres países germano hablantes se han embarcado en desarrollos similares, en los que las competencias/estándares se encuentran en un conglomerado tridimensional, y contienen también componentes de disposición y volitivas. Se han hecho esfuerzos por medir empíricamente las facetas de las competencias de individuos y de grupos más grandes de estudiantes, mientras se intenta reducir paso a paso el número de dimensiones de actividades, de modo que se reduzcan los traslajos.

Esta excursión se ha enfocado en gran medida en marcos y en documentos curriculares. Pero, ¿qué tan fuerte es el equilibrio entre metas y deseos expresados en estos documentos y las prácticas en las aulas de matemática? Esto nos lleva la siguiente sección.

## **Retos para la instrumentación**

Uno de los retos mayores para la instrumentación de ideas orientadas a las competencias en el aula, en los marcos de referencia y en los currículos es que los profesores no siempre tienen las competencias profesionales y los recursos didáctico-pedagógicos necesarios para crear culturas en el aula en las que sea la norma el trabajo sistemático hacia el desarrollo

de las capacidades (competence) matemáticas de los estudiantes. En todo el mundo, parece haber una falta de orientaciones suficientemente útiles y de apoyo a profesores en servicio o en formación. Esto no es solamente un obstáculo para la implantación de competencias en la práctica cotidiana en el aula, sino también para la investigación y el desarrollo comprometido en la influencia de dicha práctica. Necesitamos entender mejor cómo la investigación en competencias matemáticas puede transformarse en acción educativa y en diseños de intervención y viceversa: ¿cómo la acción y la intervención educativa se vuelven objetos de investigación?

La construcción de puentes entre la investigación y la práctica con respecto a las competencias matemáticas es notoriamente difícil y ha sido abordada en varios lugares. Algunos planteamientos (en Alemania, por ejemplo) se han enfocado en el diseño y la instrumentación de programas de desarrollo profesional para maestros, destinados al desarrollo de su entendimiento teórico junto con su práctica de enseñanza y de evaluación. Cataluña, en España, ofrece un ejemplo de reconocimiento efectivo del desarrollo profesional como algo críticamente importante para la instrumentación de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática orientados hacia las competencias. La meta no es sólo el reconocimiento, sino también el trabajo con profesores en formación y en servicio. De este modo, la traducción de la investigación en competencias en práctica ha sido abordada en el proyecto de desarrollo ARC (Aplicación de Recursos al Currículo). El proyecto se inició con el fin de modelar, pilotear y evaluar “actividades matemáticas en un marco de referencia basado en competencias”, suponiendo que esto podría ayudar a los profesores a enfrentar el “reto de apoyar a todos los aprendices en el desarrollo de competencias matemáticas proporcionándoles experiencias de aula validadas”. Se han llevado a cabo proyectos que implican la colaboración de profesores e investigadores en escuelas, aulas y actividades específicas con el fin de hacer pública una enseñanza exitosa. Los proyectos han mostrado la complejidad de cambiar culturalmente prácticas largamente establecidas sobre la enseñanza de la matemática que se han convertido en rutina.

Los hallazgos provenientes de varios ciclos de tales proyectos sugieren mayores retos a ser enfrentados. Tenemos que trabajar más para entender las dimensiones operacionales de las competencias matemáticas, en especial con respecto a qué puede contribuir la investigación acción colaborativa y cómo. Aquí, los investigadores se enfrentan a la necesidad de ir más allá de la colaboración anecdótica en investigación y desarrollo con respecto a escuelas, profesores, aulas y estudiantes particulares.

Independientemente del éxito y de la importancia de las iniciativas locales ligadas al contexto de desarrollo profesional y de la investigación, no queda claro cómo las mejoras obtenidas en tales circunstancias pueden ser sustentables y generalizables.

### **Perspectivas y observaciones finales**

Hemos intentado presentar aspectos significativos, y sin embargo necesariamente seleccionados, de lo que algunos llaman “giro hacia las competencias”, y algunos de sus desafíos, en educación investigación y práctica matemáticas. Esto ha dado lugar a un cierto número de observaciones y conclusiones importantes:

- Sigue siendo de vital importancia entender que significa dominar la matemática y que se necesita para hacerlo.
- Enfocarse en la aplicación de la matemática en un sentido amplio se considera esencial en cada vez más lugares.
- Para la conceptualización de esta aplicación es necesaria una mayor clarificación teórica y más investigación empírica.
- Entender las relaciones y los equilibrios entre la aplicación de la matemática y los otros componentes de la comprensión y el conocimiento matemáticos sigue siendo un desafío.
- Existe una necesidad de clarificar el papel de los factores actitudinal, volitivo y de disposición en la conceptualización de las competencias matemáticas y su realidad.
- Cuestiones de terminología siguen causando confusión. ¿En qué grado son realmente equivalentes cosas que llamamos con el mismo nombre? (competencias, por ejemplo), ¿y en qué grado las cosas que llamamos con nombres diferentes realmente se refieren a nociones diferentes? Y, en la medida en que lo hagan, ¿cuáles son exactamente las relaciones entre ellas?
- La falta de un marco de referencia conceptual y teórico unificado para el dominio de competencias, procesos, prácticas, etcétera, tiende a impedir las posibilidades de vencer los desafíos identificados.
- En resumen, en los años venideros debemos enfrentar una gran cantidad de trabajo de investigación y de desarrollo. Por consiguiente, es razonable esperar que haya un progreso sustantivo que informar en los futuros Congresos Internacionales de Educación Matemática (ICME)

## References

Australian Education Council. (1990). A national statement on mathematics for Australian school. <http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED428947.pdf>. Consultada en mayo 30, 2016.

Australian Education Council/Curriculum Corporation. (1994). A national statement on mathematics for Australian school. <http://catalogue.nla.gov.au/Record/80076>. Consultada en mayo 30, 2016.

Board of Education. (1938). Report of the consultative committee on secondary education with special reference to grammar schools and technical high schools ("The Spens Report"). London: HM Stationery Office.

Husén, T. (Ed.). (1967). International study of achievement in mathematics (vols. 1 & 2). Stockholm: Almqvist & Wiksell.

National Council of Teachers of Mathematics. (1980). An agenda for action: Recommendations for school mathematics of the 1980s. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

National Research Council, & Mathematics Learning Study Committee. (2001). Adding it up: Helping children learn mathematics. National Academies Press.

Niss, M. (2003). The Danish KOM project and possible consequences for teacher education. In R. Strässer, G. Brandell, B. Grevholm, & O. Helenius (Eds.) (2003). *Educating for the future. Proceedings of an International Symposium on Mathematics Teacher Education* (pp. 178–192). Gothenburg: Royal Swedish Academy of Science.

Niss, M., Bruder, R., Planas, N., Turner, R., & Villa-Ochoa, J. A. (2016). Survey team on: Conceptualisations of the role of competencies, knowing and knowledge in mathematics education research. *ZDM Mathematics Education*, 48(5), 611–632.

Niss, M., & Jensen, T. H. (Eds.). (2002). Kompetencer og matematiklæring—Idéer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark. Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie nr. 18. Copenhagen: The Ministry of Education.

Papert, S. (1972). Teaching children to be mathematicians vs. teaching about mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 3(3), 249–262.

Pólya, G. (1945). *How to solve it?*. Princeton: Princeton University Press.

RAND Mathematics Study Panel. (2003). *Mathematical proficiency for all students. Toward a strategic research and development program in mathematics education*. Santa Monica, CA: RAND. Open