

Introducción al marco de referencia

Enseñanza para un Sólido Entendimiento (TRU)

Sugerencia de citado:

Schoenfeld, A. H., y the Teaching for Robust Understanding Project. (2016). *An Introduction to the Teaching for Robust Understanding (TRU) Framework*. Berkeley, CA: Graduate School of Education. Recuperado de <http://map.mathshell.org/trumath.php> or <http://tru.berkeley.edu>.

Este material puede ser reproducido y distribuido, sin notificación, con fines no comerciales. Todos los demás derechos reservados.

Versión en español de Ángel Homero Flores, Colegio de Ciencias y Humanidades, UNAM, México, noviembre de 2017.

Introducción al marco de referencia
Enseñanza para un Sólido Entendimiento (TRU)

Tabla de Contenidos

Resumen	1
Qué hallaras en este documento	2
Las cinco dimensiones de TRU.....	4
Contenido.....	4
Demanda cognitiva	6
Acceso equitativo al contenido	8
Disponibilidad, dominio e identidad	10
Evaluación Formativa	12
Herramientas para las comunidades de enseñanza y administrativa	14
El dominio TRU: Guías de conversación general y específica de matemática	15
Módulo A de la Guía de conversación TRU Mat: Tareas contextualizadas de álgebra.....	18
Guías de observación TRU general y específica de matemática	19
Instrumentos específicos del Proyecto Evaluación en Matemática.....	22
Lecciones de evaluación formativa en matemática.....	22
Tareas y pruebas de evaluación sumaria.....	23
Borradores para Módulos de desarrollo profesional.....	24
Red de matemática de comunidades de mejora	24
Artículos y Herramientas para la comunidad de investigación.....	25
Artículos.....	25
Herramientas	27
Referencias.....	28
Reconocimientos.....	32

Introducción al marco de referencia Enseñanza para un Sólido Entendimiento

Resumen

En este documento se da una introducción al marco de referencia Enseñanza para un Sólido Entendimiento (**TRU**, por sus siglas en inglés). TRU proporciona una respuesta basada en la investigación, a la pregunta:

¿Cuáles son los atributos de los ambientes de aprendizaje equitativos y sólidos, en los que todos los estudiantes tengan apoyo para convertirse en pensadores disciplinares flexibles, con conocimiento y con recursos?

La respuesta, que depende de lo que sabemos como profesores e investigadores, aparece de manera sucinta en la Tabla 1. La calidad de un ambiente de aprendizaje depende del grado en el que proporcione oportunidades a los estudiantes con respecto a las siguientes cinco dimensiones:

- (1) La riqueza de los conceptos y las practicas disciplinares (contenido) disponibles para aprender.
- (2) Entendimiento y *esfuerzo productivo*.
- (3) Acceso significativo y equitativo a los conceptos y las prácticas.
- (4) Medios para construir identidades disciplinares positivas a través de la presentación, la discusión y el refinamiento de ideas.
- (5) Sensibilidad del ambiente hacia su forma de pensar.

Las cinco dimensiones de un aula matemáticamente poderosa				
Contenido	Demanda Cognitiva	Acceso Equitativo al Contenido	Disponibilidad, Dominio e Identidad	Evaluación Formativa
Grado en el cual la actividad en el aula proporciona oportunidades para que los estudiantes se conviertan en pensadores disciplinares flexibles, con conocimiento y con recursos. Las discusiones son centradas y	Grado en el cual los estudiantes tienen la oportunidad de confrontar y entender importantes ideas disciplinares y su uso. Los estudiantes aprenden mejor cuando se les desafía	Grado en el cual las estructuras de la actividad invitan y apoyan la participación activa de todos los estudiantes del grupo en el contenido central que se está abordando. Sin importar qué tan rico sea el contenido que se analice, un	Grado en el que el estudiante tiene oportunidad de “hacer y decir”: contribuir en conversaciones sobre ideas disciplinares, retomar las ideas de otros, y dejar que otros retomen las propias, de manera que	Grado en el que las actividades en el aula propician el pensamiento del estudiante y en el que las interacciones subsecuentes responden a dicho pensamiento, incorporando un inicio productivo y

Las cinco dimensiones de un aula matemáticamente poderosa				
coherentes, proporcionan la oportunidad de aprender ideas, técnicas y perspectivas disciplinares, hacer conexiones y desarrollar hábitos de pensamiento disciplinar productivo.	de modo que tengan espacio y apoyo para el crecimiento, con tareas cuya dificultad va de moderada a alta. El nivel de desafío debería llevar a lo que se conoce como <i>un esfuerzo productivo</i> .	grupo en el que un pequeño número de estudiantes obtiene la mayor parte de la atención no es equitativo. Todos los estudiantes necesitan ser involucrados de manera significativa.	contribuya al desarrollo de su disponibilidad (capacidad y voluntad de involucrarse) y dominio sobre el contenido, identificándose positivamente como aprendiz y pensador.	tomando en cuenta los errores emergentes. Una instrucción poderosa “va a donde el estudiante está” y le da la oportunidad de profundizar su entendimiento.

Tabla 1. Dimensiones de un aula poderosa.

Qué hallarás en este documento

La comunidad de Enseñanza para un Sólido Entendimiento (TRU)¹ ha creado una colección de herramientas para profesores, instructores y administradores para apoyar el mejoramiento de la enseñanza; y herramientas y artículos para apoyar a los investigadores en el desarrollo de un entendimiento más profundo de la enseñanza y cómo enriquecerla. En el presente documento se introduce el marco de referencia y algunas de sus herramientas clave. La mayoría de éstas están disponibles en versiones generales y específica para el área de matemática. La documentación completa y todas las herramientas TRU estarán disponibles en <http://map.mathshell.org/trumath.php> y <http://tru.berkeley.edu>.

Empezamos con una discusión de las intenciones que fundamentan a TRU. Después viene una breve descripción de cada una de sus cinco dimensiones. Más adelante presentamos ejemplos comentados de los documentos que se encuentran en el documento base de TRU. La descripción deberá proporcionar al lector una idea bastante precisa del marco y de cada una de las herramientas, de modo que pueda determinar qué herramientas son de mayor utilidad para sus propósitos.

¿De dónde vienen estas ideas y cómo pueden ser de utilidad?

Existe una gran cantidad de literatura sobre enseñanza y aprendizaje, y sobre ‘buenas cosas’ que deben suceder en un aula. Hay también una amplia gama de marcos de referencia para observar un salón de clases. La motivación para

¹ El trabajo en TRU empezó con proyectos de la Universidad de California en Berkeley, la Universidad Estatal de Michigan y la Universidad de Nottingham. Nuestros socios, en la actualidad, incluyen equipos de investigación del Instituto SERP y del Mills College; y distritos escolares como los de Chicago, Oakland y San Francisco, así como una red de distritos escolares y organizaciones profesionales ubicadas en todo California y más allá. Nuestros productos están disponibles de manera gratuita para profesores, administradores e investigadores para su uso no lucrativo.

desarrollar TRU fue la organización de ese conocimiento de modo que fuera fácil de entender, organizar y utilizar.² Las cinco dimensiones locales de TRU tienen las siguientes propiedades:

1. Son integrales. Si un ambiente de aprendizaje propicia el aprendizaje en estas cinco dimensiones, entonces los estudiantes que emergen de éste serán pensadores y aprendices flexibles, con conocimiento y con recursos.
2. Cada dimensión puede ser el foco de un programa de desarrollo profesional. Departamentos educativos, escuelas y distritos escolares pueden organizarse de modo que se tengan mejoras sistemáticas.
3. Juntas, proporcionan un lenguaje y un marco de referencia para indagar en la instrucción y mejorarla: no se trata de un conjunto de “recetas” que dicen al profesor qué debe hacer.

El marco TRU no contiene ‘prescripciones’, en el sentido de que no indica lo que debe suceder en el aula: hay muchas maneras en los profesores crean ambientes de aprendizaje poderosos y no hay una “manera correcta” de enseñar. La idea clave es que TRU especifica los atributos de los medios de aprendizaje en los que pueden crecer los estudiantes.

La instrucción en el aula, no importa qué tan poderosa sea, siempre se puede enriquecer. Puede mejorarse si, de manera rutinaria y habitual, profesores, instructores y administradores toman en cuenta las cinco dimensiones de TRU al momento de planificar, instrumentar y reflexionar sobre la enseñanza³.

Mejorar la enseñanza no es fácil, pero el saber en qué centrarse puede ser de gran ayuda. Involucrarse en una reflexión sistemática y colaborativa sobre ideas disciplinares, formas de inculcar dichas ideas a los estudiantes, maneras de proporcionar a *todos* los estudiantes oportunidades de entender, de proporcionar al estudiante la oportunidad de expresar lo que entiende y construir conocimiento apoyándose en sus propias ideas y las de otros, y ajustar la enseñanza a la luz del entendimiento que revelan los estudiantes, tendrá como resultado una mejora permanente de la enseñanza. Las comunidades profesionales de aprendizaje que se enfocan en lo que cuenta, producirán mejoras sustentables en la enseñanza y en el entendimiento del estudiante.

² Para más información sobre la historia y algunos detalles, véase Schoenfeld, 2013, 2014, 2015; Schoenfeld, Floden, and the Algebra Teaching Study and Mathematics Assessment Project, enviado para publicación.

³ Hacer una revisión de lo que cuenta puede tener como resultado una mejora significativa. Por ejemplo, Gawande (2007, 2009) ha mostrado que las listas de cotejo o de verificación que recuerdan a médicos y enfermeras las cosas que deben hacer produjo mejoras sustantivas en las tasas de recuperación y mortalidad en el hospital. Si recordatorios de lavarse las manos antes de interactuar con un paciente puede mejorar los resultados médicos, entonces es razonable pensar que la educación puede mejorarse si, de manera rutinaria, nos preguntamos (por ejemplo) en qué parte de una lección los estudiantes tienen oportunidad de entender en un nivel apropiado de demanda cognitiva.

Las Cinco Dimensiones de TRU

Dimensión 1: Contenido

Grado en el cual la actividad en el aula proporciona oportunidades para que los estudiantes se conviertan en pensadores disciplinares flexibles, con conocimiento y con recursos. Las discusiones son centradas y coherentes, proporcionan la oportunidad de aprender ideas, técnicas y perspectivas disciplinares, hacer conexiones y desarrollar hábitos de pensamiento disciplinar productivo.

El entendimiento de los estudiantes de una disciplina se forma, fundamentalmente, mediante su experiencia en el aula. Si, por ejemplo, un grupo de lectura se centra en la decodificación de textos, uno de historia en memorizar las fechas de los principales hechos o un grupo de matemática en la memorización de procedimientos, habrá poca oportunidad de que los estudiantes salgan de la clase con una apreciación de la disciplina o con el entendimiento que necesitan.

Aprender a pensar como un historiador, como un científico o un practicante de cualquier disciplina significa captar los conceptos y las prácticas de esa disciplina, enfocando los fenómenos a través de una lente disciplinar, con un amplio espectro de conocimiento y herramientas a nuestra disposición. Los historiadores se ubican en contexto para entender las motivaciones y las acciones de las figuras históricas. Los escritores poseen un sentido de propósito y un sentido de audiencia cuando escriben, así como un importante conocimiento factual y gramatical. Científicos y matemáticos indagan sobre lo que hace que las cosas funcionen, utilizando la razón, ecuaciones, representaciones y modelos al servicio del entendimiento. Esta combinación de orientaciones disciplinares, conocimiento (incluyendo conceptos y herramientas), prácticas y hábitos mentales es a lo que llamamos en corto, “contenido” de la disciplina. Los estudiantes necesitan experimentar ese contenido en su riqueza completa si se han de convertir en pensadores disciplinares.

Cada disciplina ha producido uno o más conjuntos de normas o estándares: afirmaciones con respecto a los entendimientos esenciales que deben desarrollar los estudiantes. Éste no es el lugar para revisar tales documentos, sino simplemente se trata de hacer notar que si las actividades en un salón de clase no están a la altura de las normas disciplinares relevantes, es difícil imaginar que los estudiantes de ese grupo saldrán con un profundo sentido de la disciplina o serán capaces de usar su conocimiento de manera efectiva.

En la sección de herramientas de este documento se proporciona la descripción de herramientas como las Guías de Conversación y de Observación de TRU, en las que se ofrecen formas de inquirir y reflexionar sobre la riqueza del contenido disciplinario que se ofrece a los estudiantes.

Sin embargo, tener un contenido rico es solo el principio. La idea principal detrás de TRU es que lo que cuenta en la instrucción es cómo los estudiantes encuentran el contenido: cómo están o no en posición de aprovechar la riqueza que la disciplina

ofrece. Todos hemos estado en clases dónde, por ejemplo, el contenido estaba “sobre nuestras cabezas” o en las que, por alguna, no podíamos conectarnos con el contenido; no importa que tan hermoso pudo haber sido, estábamos perdidos. Es por ello que son tan importantes las dimensiones 2 a 5 del marco TRU: cómo los mismos estudiantes experimentan la disciplina.

Dimensión 2: Demanda Cognitiva

Grado en el cual los estudiantes tienen la oportunidad de confrontar y entender importantes ideas disciplinares y su uso. Los estudiantes aprenden mejor cuando se les desafía de modo que tengan espacio y apoyo para el crecimiento, con tareas cuya dificultad va de moderada a alta. El nivel de desafío debería llevar a lo que se conoce como un esfuerzo productivo.

Si a los estudiantes se les asigna un trabajo que es demasiado fácil, habrá poco que aprender, y es probable que se sientan frustrados. Si se les asigna trabajo que está muy distante de su entendimiento actual y no pueden ver modos de avanzar, entonces no hay manera de aprender; es probable que se sientan aburridos y frustrados. Stein y Smith lo ponen de la siguiente manera: “tareas que piden a los estudiantes que lleven a cabo un procedimiento memorizado de manera rutinaria conducen a un solo tipo de oportunidad de pensar; las tareas que requieren que los estudiantes piensen conceptualmente y que les estimula a hacer conexiones llevan a múltiples oportunidades de pensamiento”. El desafío es encontrar tareas y actividades en el aula, en cada disciplina, estructuradas de forma que proporcionen a los estudiantes oportunidades significativas para aprender y que apoyen su crecimiento mediante un involucramiento activo con el contenido.

Los investigadores usan el término *demanda cognitiva* para describir el nivel de dificultad, en relación con lo que se sabe, del trabajo que se pide a los estudiantes que hagan. El objetivo es encontrar un terreno neutral, en el que tengan oportunidad de construir a partir de lo que saben y ampliar su conocimiento actual. Para entender un contenido rico, los estudiantes necesitan involucrarse en un *esfuerzo cognitivo* (Stein y Smith, 1998; Hess, 2006). Un esquema amplio para pensar en múltiples niveles de desafío se encuentra en el marco *Profundidad de Conocimiento* (DOK, por sus siglas en inglés) de Webb (1997, 2002), en el que se identifican cuatro niveles de DOK: Memorización y Reproducción; Habilidades y Conceptos; Pensamiento Estratégico y Razonamiento; y Pensamiento extendido (véase también Hess, 2013). En varios momentos, los estudiantes necesitan trabajar en los cuatro niveles. Cuando los estudiantes tienen dificultades al lidiar con cuestiones complejas, existe la tendencia, entre los profesores, a reducir la demanda cognitiva y, así, privarlos de la oportunidad de hacer un esfuerzo cognitivo y entender (Henningsen and Stein, 1997). El reto, en todas las disciplinas, es explicar de manera clara y apoyar de otras formas (por ejemplo, con consejos heurísticos, cuestiones emergentes, sugerencia de planteamientos) sin dar a los estudiantes la forma precisa de proceder. Esto, de ninguna manera, es fácil (pero véase el Dominio 5. *Evaluación formativa*). Hay muchas maneras en que los profesores pueden iniciar actividades cognitivamente demandantes en el aula, y de trabajar para mantener niveles apropiados de demanda cognitiva. Por ejemplo,

- Al diseñar y elegir tareas, el profesor puede evitar dar instrucciones detalladas paso a paso para resolver problemas; poner ejercicios repetitivos o dar *recetas* detalladas para terminar la tarea. Cuestiones que dejan poco espacio para que los estudiantes construyan sobre su entendimiento.
- El profesor puede apoyar activamente a los estudiantes en trabajo individual, por equipos o en las discusiones grupales, haciendo preguntas que ayudan a aclarar las dudas, y proporcionando andamiaje en vez de ir directamente a sugerir formas demasiado específicas de abordar las tareas asignadas.
- El profesor puede emplear una gama de técnicas para ayudar a los estudiantes a *poner sus ideas sobre la mesa* y trabajar con ellas. Véase, por ejemplo, SERP (2016) sobre pláticas académicamente productivas.
- El profesor puede fomentar el esfuerzo productivo de los estudiantes de manera general discutiendo ideas de inteligencia maleable y de una mentalidad en crecimiento (Dweck, 2007), aclarando que el aprendizaje no es cuestión de memorización, y que uno se desempeña mejor en cualquier disciplina trabajando duro en ella.

Véase la sección de *herramientas* de este documento para tener acceso a recursos relacionados con la demanda cognitiva.

Aquí, hacemos notar breves conexiones con las otras dimensiones de TRU. Como lo mencionamos, el *esfuerzo productivo* es el mecanismo para desarrollar un entendimiento profundo del contenido (Dimensión 1). Es esencial para que todos los estudiantes (Dimensión 3), no sólo para que tengan una participación significativa, pero también para que se comprometan con el contenido de forma que lleguen a *poseerlo* y desarrollen una identidad disciplinaria positiva (Dimensión 4). Y, la mejor manera de hacer que los estudiantes trabajen en los niveles correctos de desafío es hacer su forma de razonar accesible a todos, de modo que la instrucción pueda *alcanzarlos en dónde estén*, con el fin de apoyar su avance (Dimensión 5).

Dimensión 3: Acceso Equitativo al Contenido

Grado en el cual las estructuras de la actividad invitan y apoyan la participación activa de todos los estudiantes del grupo en el contenido central que se está abordando. Sin importar qué tan rico sea el contenido que se analice, un grupo en el que un pequeño número de estudiantes obtiene la mayor parte de la atención no es equitativo. Todos los estudiantes necesitan ser involucrados de manera significativa.

Un aula equitativa proporciona a *todos* los estudiantes acceso a conceptos disciplinares significativos, apoyándolos en el desarrollo de su entendimiento y en la construcción de identidades disciplinares productivas.

Esta dimensión, *Acceso Equitativo al Contenido*, se enfoca en la cuestión de si, dentro del aula, existe un acceso diferenciado al contenido que se está tratando. Puede haber discusiones ricas u otras actividades productivas, pero ¿quién participa en ellas?

Hay una larga historia de logros diferenciados por estudiantes con diversos antecedentes raciales, étnicos y económicos, que, según se argumenta, pueden ligarse a un acceso diferenciado a las oportunidades de aprendizaje (Oakes, Joseph, & Muir, 2001). Mientras que una fuente obvia de este acceso diferenciado al contenido es el *encausamiento (tracking)*, que está fuera del ámbito de los esfuerzos de mejora del salón de clase, otra fuente es el patrón de discurso dentro del aula. ¿Todos los estudiantes tienen frecuentes oportunidades de discutir ideas importantes? En el texto *How Schools Shortchange Girls* (Cómo la Escuela Subestima a las Mujeres, de la Asociación Norteamericana de Mujeres Universitarias, 1992), la investigación reveló un patrón de muchachos que eran tomados en cuenta con más frecuencia que las muchachas; y cuando se les llamaba a participar, a las mujeres siempre se les hacían preguntas menos orientadas conceptualmente que a los hombres. ¿Qué oportunidades tienen los aprendices de inglés, o los estudiantes de grupos raciales o étnicos diferentes al grupo dominante? ¿Existen múltiples oportunidades para que los estudiantes se involucren en el contenido, desarrollen y muestren competencia (Cohen, 1994) y construyan su entendimiento basados en el conocimiento que traen consigo al aula? (Véase, por ejemplo, Moll, Amanti, Neff, y Gonzalez, 1992)

La investigación indica que los maestros efectivos fomentan la participación de todos sus estudiantes que integran la comunidad intelectual del aula (Boaler, 2008; Cohen y Lotan, 1997; Schoenfeld, 2002). Seleccionan y presentan tareas con una gama de puntos de entrada para permitir que todos los estudiantes se involucren en un contenido. Establecen y refuerzas las expectativas de tener varias maneras de participar en las actividades de la clase y contribuir en su desarrollo.

Existen muchas maneras mediante las cuales se puede apoyar a los estudiantes a tener acceso al contenido y a las prácticas disciplinares:

- Los profesores, tanto en la selección como en el diseño de tareas, y en la manera de proponerlas, pueden proporcionar múltiples puntos de acceso al material relevante, cumpliendo la expectativa de que *todos los estudiantes* son capaces de participar, y se espera que lo hagan.
- Las tareas que se pueden llevar a cabo de dos o tres maneras, y cuyos métodos de solución se relacionen entre sí, proporcionan acceso a estudiantes que eligen otras formas de abordar el problema y, además, dan oportunidades para hacer conexiones matemáticas entre los planteamientos de los estudiantes.
- Los profesores pueden fomentar la generación y el refinamiento de ideas, en vez de, principalmente, criticar o de ignorar comentarios que son parcialmente correctos.
- Los profesores pueden fomentar el uso de varios registros de lenguaje, por ejemplo, pidiendo a un estudiante que repita las ideas de otro, pero usando un lenguaje más académico o, tal vez, en un lenguaje más coloquial-
- Durante las discusiones, los profesores pueden usar múltiples estrategias para fomentar una amplia participación. Por ejemplo, llamando sólo a estudiantes que aún no han participado; dándoles tiempo para que platiquen con otro estudiante antes de responder en público; y eligiendo al azar a los estudiantes que contribuirían al diálogo.
- Los profesores pueden usar tareas con un lenguaje y en contextos que conecten las experiencias de vida de los estudiantes y den ventanas para observar experiencias no familiares, siendo conscientes de su poder y su privilegio.

Véanse las herramientas de este documento para tener un análisis más profundo y sugerencias de otros recursos.

Dimensión 4: Disponibilidad, Dominio e Identidad

Grado en el que el estudiante tiene oportunidad de “hacer y decir”: contribuir en conversaciones sobre ideas disciplinares, retomar las ideas de otros, y dejar que otros retomen las propias, de manera que contribuya al desarrollo de su disponibilidad (capacidad y voluntad de involucrarse) y dominio sobre el contenido, identificándose positivamente como aprendiz y pensador.

La Dimensión 4 se enfoca en el grado en el que los estudiantes tienen la oportunidad de generar y compartir ideas, tanto en actividades plenarias como en equipos pequeños; el grado en el que se fomentan sus contribuciones, son reconocidas y apoyadas como parte de la actividad regular del aula; y el grado en el que sus ideas se van construyendo a medida que el grupo construye su entendimiento colectivo.

La disposición y la identidad de la gente (por ejemplo, *soy un lector, o no sólo soy un historiador*) se derivan de la experiencia con la disciplina. Estas disposición e identidad, a menudo formadas en el aula, modelan la forma en que las personas se relacionan con la disciplina por el resto de su vida. Muchos estudiantes adquieren creencias contraproducentes sobre sí mismos y la disciplina; por ejemplo, hay quienes son *malos en ciencia* o quienes piensan que la historia no tiene nada que ver con los eventos contemporáneos; o que sólo los genios pueden crear matemática. Pero, no debería ser así.

Un aspecto fundamental de la identidad disciplinar es la *disponibilidad* (*agency* en inglés): la voluntad de un individuo de comprometerse con la disciplina, que viene de la percepción de que se puede progresar en cuestiones desafiantes al trabajar en ellas, y de la confianza en las conclusiones a las que se lleguen. Engle (2011) escribe:

Los aprendices tienen disponibilidad intelectual cuando... comparten lo que realmente piensan sobre el problema abordado, más que sentir la necesidad de llegar a una respuesta en la que creen o no, pero que coincide con lo que alguna otra autoridad, como el maestro o el libro de texto, dice que es lo correcto.

Dominio se refiere al sentido de que uno tiene control de las ideas disciplinares, en vez de repetir como loros o memorizar las ideas de otros. Es la diferencia entre decir “He estado pensando en esto y tengo certeza de que tiene sentido” y confiar en una autoridad externa.

Una cuestión clave es el grado en que el ambiente de aprendizaje da a los estudiantes la oportunidad de desarrollar estos aspectos de su identidad disciplinar y personal. Los profesores efectivos reconocen las fortalezas de cada estudiante y las capitalizan, encontrando formas de ayudar al estudiante a entrar a la comunidad de aprendizaje cuando les cuesta trabajo hacerlo por sí mismos (Boaler, 2008; Cohen y Lotan, 1997). Hay múltiples formas de hacer esto. El profesor puede crear espacios para el reconocimiento público de las contribuciones de los estudiantes a la discusión

disciplinar, para ayudar a trabajar en equipos pequeños, y para atender a aquellos que tienen dificultades para fortalecer su forma de razonar. Por ejemplo, Resnick, O'Connor y Michaels (2007) identifican poderosos movimientos orales de profesores como el parafraseo, la repetición o la síntesis de las contribuciones de los estudiantes para toda la clase; piden a los estudiantes que replanteen el razonamiento de otros, que abunden en lo que otros han dicho y que expliquen.

Más allá de la actividad del profesor, sin embargo, está la naturaleza del ambiente en el aula. ¿Los estudiantes se sienten seguros contribuyendo a las conversaciones que se dan en el aula? ¿Se han establecido normas para hacer las contribuciones? ¿Para criticar las contribuciones de otros?

Existe mucha literatura sobre “pláticas que explican”, el tipo de discurso en el aula que apoya a los estudiantes en la construcción conjunta de ideas de manera responsable y respetuosa. Para consultar un amplio portafolios de recursos véase Institute for Learning (2016).

Por dar un ejemplo, una técnica para moldear el discurso en el aula de manera productiva es el uso de “oraciones troncales” cuyo objetivo es promover una plática que explica.

- Estoy de acuerdo (o en desacuerdo) con eso, porque _____
- Todavía tengo dudas sobre _____
- Es lo mismo, porque _____
- Observé que _____
- Estoy confundido por _____
- Para complementar en lo que dijo: _____

(véase

http://www.ces.rcs.k12.tn.us/web_uploads/203_accountable_talk_toolkit_10-09.pdf)

Sólo en ambientes donde los estudiantes se sienten cómodos contribuyendo al desarrollo de ideas disciplinares tendrán oportunidad de desarrollar un sentido de disponibilidad académica y disciplinar, dominio de las ideas analizadas y una identidad disciplinaria positiva.

Véase la sección de herramientas de este documento para tener un mayor análisis.

Dimensión 5: Evaluación Formativa

Grado en el que las actividades en el aula propician el pensamiento del estudiante y en el que las interacciones subsecuentes responden a dicho pensamiento, incorporando un inicio productivo y tomando en cuenta los errores emergentes. Una instrucción poderosa “va a donde el estudiante está” y le da la oportunidad de profundizar su entendimiento.

La evaluación formativa implica la orquestación de actividades en el aula que revelen el estado actual del entendimiento del estudiante *durante el proceso de aprendizaje*. Actividades que revelan la manera en que los estudiantes entienden el contenido a medida que aprenden, proporcionan al profesor y a los estudiantes la oportunidad de basarse en los entendimientos que los estudiantes han desarrollado, y atender malentendidos emergentes. La evaluación formativa puede incluir cuestionarios o pruebas, pero implica mucho más. A menudo incluye la obtención informal de información, por ejemplo, plantear preguntas que pueden traer a colación suposiciones incorrectas o ideas que necesitan cuestionarse o que ayudan a los estudiantes a darse cuenta que necesitan cavar más profundamente en el contenido. El uso de la evaluación formativa contrasta fuertemente con el uso de la evaluación sumaria: las pruebas formales de final de unidad o de final de año que pueden revelar lo que el estudiante sabe y puede hacer, pero que dan esa información demasiado tarde para que sea útil para ayudar a los estudiantes a tener un entendimiento más profundo conforme van aprendiendo.

En la evaluación formativa, la información recabada sobre el razonamiento y el entendimiento del estudiante tiene un papel principal en la conformación de las siguientes actividades en el aula (Black y col, 2003; Shepard, 2000). Esto puede parecer desafiante al principio (¿quién sabe lo que el estudiante dirá, si le damos oportunidad?), pero es esencial para encontrar a los estudiantes en donde estén. Ya que se empieza a dar a los estudiantes la oportunidad de comprometerse abiertamente con la disciplina, la evaluación formativa se convierte en un hábito fácilmente sustentable. Hay mucha literatura sobre las concepciones erróneas de los estudiantes o sobre “concepciones alternativas” que documentan el tipo de entendimiento parcial que desarrollan en áreas de contenido específico. Conocer estos patrones típicos del razonamiento del estudiante puede ayudar a los profesores a estar preparados para lidiar con ellos⁴. Para ver algo más detallado en matemática, consulte Lecciones de Evaluación Formativa descritas en la sección de herramientas de este documento.

A través de atender deliberadamente el razonamiento y el entendimiento de los estudiantes, y luego moldear la instrucción en consecuencia, la enseñanza se “vuelve más clara, más enfocada y más efectiva” (National Research Council, 2001, p.350).

⁴ Desde luego, los profesores adquieren tal conocimiento (parte de éste se conoce como *conocimiento pedagógico del contenido*) con el tiempo. La cuestión aquí es que el proceso puede acelerarse si uno lo asume concientemente.

Además, escuchar el razonamiento de los estudiantes proporciona la información que permite al profesor ajustar el nivel de demanda cognitiva, de modo que los estudiantes estén en posición de asumir posiciones de entendimiento significativo. Esto es, la Dimensión 5 (evaluación formativa) proporciona el apoyo estructural para la Dimensión 2 (demanda cognitiva)

Las revisiones ampliamente citadas de Black y Williams (1998 a y b) documentan la ganancia sobre aprendizaje significativo que se tienen los profesores con el uso de la evaluación formativa. Cuando la evaluación se convierte en una parte integral y en desarrollo del proceso de aprendizaje, en oposición a una interrupción de las actividades en clase, el razonamiento del estudiante toma un papel más central en la determinación de la dirección y la forma de las actividades en el aula (Shepard, 2000; Shafer y Romberg, 1999; de Lange, 1999).

Por supuesto, la evaluación formativa sólo es útil si hay algo interesante e importante que evaluar, a saber, entendimiento disciplinar significativo y la habilidad de aplicar tales entendimientos de manera poderosa. Por tanto, la Dimensión 1 (contenido) está implicada en el establecimiento del contexto disciplinario para la Dimensión 5 (evaluación formativa).

En cada disciplina, múltiples ciclos de escritura (pre-escritos, esbozos, borradores, borradores revisados, etcétera) proporcionan oportunidades de refinar las ideas del estudiante y mejorar su escritura. Compartir y criticar ideas junto con otros estudiantes los coloca a todos dentro de la zona de pensamiento productivo, y les da la oportunidad de adoptar y dominar ideas. Así, una evaluación formativa efectiva (y el uso de las estructuras del aula para apoyar las interacciones entre estudiantes) fomentan el nivel correcto de demanda cognitiva (Dimensión 2) y abre oportunidades para el desarrollo de la voz del estudiante (Dimensión 4). Si se establecen normas en el aula que aporten al apoyo y las tareas tienen varios puntos de entrada (lo cual fomenta conversaciones disciplinariamente ricas), entonces se atiende el mayor logro del acceso equitativo (Dimensión 3).

Es importante observar que el maestro no necesariamente es responsable de atender todas las cuestiones que surgen cuando se solicita que el estudiante razone. Cuando se trabaja en equipos o con toda la clase en tareas ricas, los estudiantes pueden servir, entre ellos, como fuente poderosa de recursos, al provocar y complementar el razonamiento de los demás. Las Lecciones de Evaluación Formativa del Proyecto Evaluación en Matemática, que se describe en la siguiente sección, da muchos ejemplos de cómo se puede hacer esto, con tareas que invitan a la colaboración y la crítica de los estudiantes.

Herramientas para las Comunidades de Enseñanza y Administrativa

La comunidad TRU extendida ha desarrollado múltiples herramientas para el entendimiento y apoyo de la enseñanza. Lo que sigue es un muestrario que proporciona descripciones de las siguientes herramientas:

- Las Guías de Conversación de TRU, en versiones para todos los dominios y en específico para matemática.
- Las Guías de Observación TRU, en versiones para todos los dominios y en específico para matemática.
- Las Lecciones de Evaluación Formativa del Proyecto Evaluación en Matemática, Tareas y Pruebas de Evaluación Sumaria, y el borrador del módulo de Desarrollo Profesional.
- Las herramientas de la Red de Matemática de Comunidades de Mejora (MathNIC, por sus siglas en inglés).

Todos estos documentos están o estarán disponibles en <http://map.mathshell.org/trumath.php> and <http://tru.berkeley.edu>. En el corto plazo, nos referiremos a los sitios web temporales que hospedan el trabajo en progreso. Mucho de nuestro lenguaje descriptivo fue tomado de los mismos documentos.

Guías de Conversación de TRU, en versiones para todos los dominios y en específico para matemática

El propósito de las Guías de Conversación de TRU, en versiones para todos los dominios y en específico para matemática (Baldinger, Louie, y The Algebra Teaching Study and Mathematics Assessment Project, 2016; Louie, Baldinger, y The Algebra Teaching Study and Mathematics Assessment Project, 2016) es promover discusiones coherentes y en proceso en las que profesores, administradores, instructores y otros aprendan juntos. Esperamos que las preguntas de la Guía de Conversación proporcionen a los educadores experiencias y fortalezas para trabajar juntos en el desarrollo de una visión común, así como el desarrollo de prioridades y lenguaje comunes con el fin de mejorar colaborativamente la instrucción y apoyar de mejor manera a los estudiantes en el desarrollo de entendimientos sólidos.

Las Guías de Conversación pueden usarse para fomentar muchos tipos de conversaciones, incluyendo (pero no limitado a):

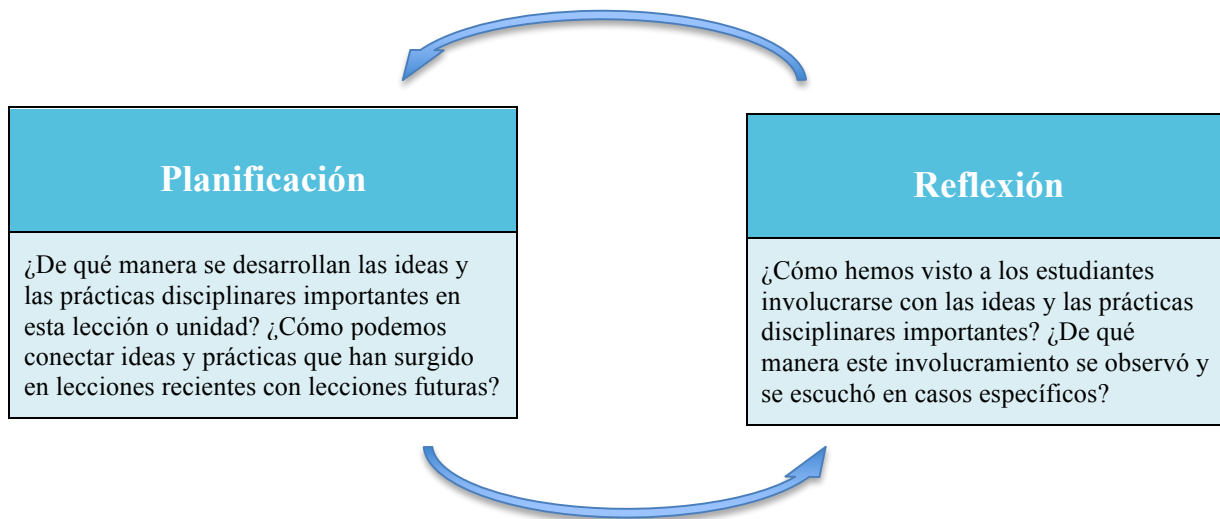
- Conversaciones para desarrollar perspectivas y prioridades comunes en grupos de educadores (departamentos por área, equipos de trabajo o el personal completo de una escuela).
- Conversaciones entre profesores, administradores e instructores sobre observaciones en el aula (véanse también las Guías de Observación TRU).
- Conversaciones entre profesores sobre observación entre pares.
- Conversaciones sobre grabaciones de video sobre la enseñanza y el aprendizaje en el aula.
- Conversaciones sobre la planificación de una unidad o lección en particular.
- Conversaciones sobre alguna estrategia instruccional en particular o un conjunto de estrategias (no necesariamente sobre contenidos específicos).
- Reflexiones individuales.

Existen dos guías, una general y otra específica de matemática⁵. Cada guía describe los propósitos de la guía (como se hizo más arriba) y cómo puede usarse, tanto para planificar lecciones como para reflexionar sobre ellas. El cuerpo de cada guía se centra en preguntas reflexivas. A continuación, se reproduce la página de contenido de la guía de conversación general.

⁵ Esperamos, con el tiempo, trabajar en asociación con profesores e investigadores de una gama de disciplinas en la construcción de guías de conversación *personalizadas* para dichas disciplinas.

Contenido
<i>Preguntas Centrales:</i> De qué manera las ideas y las prácticas disciplinares clave se desarrollan en esta lección/secuencia de lecciones? ¿Cómo podemos crear más conexiones significativas?

A menudo los estudiantes experimentan la escuela como una presentación aislada de hechos, procedimientos y conceptos que deben ensayar, memorizar y aplicar. Nuestro objetivo es dar a los estudiantes oportunidad de experimentar ideas y prácticas disciplinares coherentes y significativas. Esto significa identificar las ideas importantes que están detrás de los hechos y de los procedimientos, resaltar conexiones entre habilidades y conceptos, y relacionar conceptos entre sí (no sólo en una misma lección, sino de una a otra y entre unidades). Significa involucrar al estudiante en ideas disciplinares centralmente importantes de una manera activa, de modo que puedan entender conceptos e ideas por sí mismos y desarrollar redes sólidas de entendimiento. También significa comprometer a los estudiantes en un desempeño auténtico de prácticas disciplinares importantes (por ejemplo, razonar a partir de evidencias, comunicar el propio razonamiento a varias audiencias, etcétera).



Cosas en qué pensar
<ul style="list-style-type: none"> • ¿Cuáles son los objetivos de contenido para la lección? • ¿Qué conexiones existen (o deberían existir) entre las ideas importantes de esta lección y las de lecciones pasadas y futuras? • ¿Cómo se desarrollan las ideas disciplinares en esta lección/unidad? • ¿De qué manera se justifican los hechos y los procedimientos de la lección? • ¿De qué manera conceptos y procedimientos se conectan con ideas y prácticas importantes? • ¿Cómo observamos/escuchamos a los estudiantes involucrarse en ideas y prácticas importantes durante la clase? • ¿Qué estudiantes se comprometen profundamente con las ideas y las prácticas importantes? • ¿Cómo podemos crear oportunidades para que más estudiantes se involucren con más profundidad con las ideas y las prácticas importantes?

Las Guías de Conversación han sido ampliamente adoptadas en Estados Unidos. Para ver un ejemplo de su impacto véase la descripción de los resultados en las escuelas públicas de Chicago publicada por Brownell, Mahon, and Seward's (2016).

Módulo A de la Guía de conversación TRU Mat: Tareas contextualizadas de álgebra

Cada una de las Guías de Conversación analizadas más arriba cubren una gran cantidad de territorio: las estrategias para indagar en nuestra forma de enseñar fueron diseñadas para ser relevantes en todos los niveles educativos. Sin embargo, está claro que las especificidades de la instrucción y, por ende, sus propósitos, varían de un año al otro o de un tema al otro. Así, uno esperaría crear guías de conversación mucho más refinadas que las presentadas aquí. Un ejemplo de esto es que el equipo del Estudio de la Enseñanza del Álgebra (ATS, por sus siglas en inglés) construyó una de estas guías para abordar tareas algebraicas contextualizadas (*problemas con historia*) en temas básicos de álgebra.

En la guía de conversación específica para álgebra (Wernet y Lepak, 2014) se identifican cinco *criterios de solidez* (aspectos del aprendizaje necesarios para tener un entendimiento sólido del álgebra):

- CS 1: Leer e interpretar textos, y entender el contexto descrito en el planteamiento de problemas.
- CS 2: Identificar las cantidades importantes y las relaciones entre ellas.
- CS 3: Usar representaciones algebraicas de las relaciones entre cantidades.
- CS 4: Llevar a cabo cálculos y procedimientos con precisión y verificar la plausibilidad de los resultados.
- CS 5: Proporcionar explicaciones convincentes que dan una visión más detallada de la profundidad del razonamiento algebraico de los estudiantes.

En la guía de conversación se ofrecen cuestiones específicas de cada criterio, por ejemplo, para el Criterio de Solidez 3 (CS 3), *usar representaciones algebraicas de las relaciones entre cantidades*, la lista de cosas a hacer se encuentra en la siguiente tabla.

Representación de Relaciones Entre Cantidades
<p><i>Piensa en:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • Oportunidades que tienen los estudiantes de generar e interpretar representaciones algebraicas. • Oportunidades que tienen los estudiantes para analizar en conjunto cómo las representaciones algebraicas muestran la relación entre cantidades importantes para la tarea y cómo tales relaciones pueden generalizarse a una familia de funciones (por ejemplo, cómo se reflejan los cambios en la variable independiente en una tabla, en una gráfica o en una ecuación) • Qué aspectos de las representaciones (por ejemplo, puntos específicos de una tabla, patrones de cambio más globales de la gráfica o parámetros de una ecuación) es importante que los estudiantes atiendan y cómo se les apoya para que los atiendan. • Oportunidades para que los estudiantes consideren el funcionamiento de

Representación de Relaciones Entre Cantidades	
<p>las representaciones algebraicas y por qué ciertas representaciones son apropiadas para llevar a cabo una tarea; y oportunidades para elegir las representaciones apropiadas.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Cómo los estudiantes exploran conexiones entre representaciones. • Cómo los estudiantes explican su forma de razonar sobre sus representaciones algebraicas. • Las evidencias que indican que los estudiantes utilizan efectivamente las representaciones para modelar y resolver un problema, y cómo se involucran con tales ideas. 	

Tabla 2. Cosas por hacer con respecto a Representación de Relaciones Entre Cantidades

Uno se puede imaginar construyendo tales guías para varios temas en matemática (por ejemplo, *razonamiento y demostración*), para escribir en varios géneros en inglés, etcétera. Nuestra esperanza es que, con el tiempo, se construyan módulos parecidos para los temas centrales en todas las disciplinas.

Guías de Observación TRU General y Específica de Matemática

Las Guías de Observación TRU, disponibles también en versiones general y específicas de matemática (Schoenfeld, A. H., y el Teaching for Robust Understanding Project, 2016 a, b), fueron diseñadas específicamente para apoyar la planeación, la conducción y la síntesis de las observaciones en el aula.

La principal idea detrás del marco TRU es que lo que cuenta en la instrucción es cómo el estudiante experimenta el contenido. Esto se resume en la siguiente tabla, en la que se resaltan los aspectos clave de la instrucción desde el punto de vista del estudiante.

Observa la Lección a Través de los Ojos del Estudiante	
Contenido	<ul style="list-style-type: none"> • ¿Cuál es la idea principal de esta lección? • ¿Cómo se relaciona con lo que ya sé?
Demanda Cognitiva	<ul style="list-style-type: none"> • ¿Cuánto tiempo voy a pensar y entender las cosas? • ¿Qué sucede cuando me atoro? • ¿Me invitan a explicar las cosas o sólo a responder?
Acceso Equitativo al Contenido	<ul style="list-style-type: none"> • ¿Voy a participar en un aprendizaje matemático significativo? • ¿Puedo esconderme o ser ignorado? ¿De qué manera me involucro?
Disponibilidad, Dominio e	<ul style="list-style-type: none"> • ¿Qué oportunidades tengo de explicar mis ideas? • ¿De qué manera son consideradas?

Observa la Lección a Través de los Ojos del Estudiante	
Identidad	<ul style="list-style-type: none"> • ¿Soy reconocido como capaz de hacer contribuciones?
Evaluación Formativa	<ul style="list-style-type: none"> • ¿Cómo incluyen mis contribuciones en las discusiones en el aula? • ¿La instrucción responde a mis ideas y me ayuda a pensar con más profundidad?

Tabla 3. Guía de Observación general.

Las guías de observación adoptan esta perspectiva. Como en las guías de conversación, la intención es propiciar conversaciones colaborativas. Antes de la observación, profesor y observador analizan el plan de clase y deciden cuáles son los puntos principales en los que el observador debe centrarse. La observación podría ser incluyente: es posible que un observador experimentado tome nota sobre las cinco dimensiones. De manera alternativa, el profesor y el observador podrían acordar enfocarse en una o dos áreas que el profesor quiera abordar con detalle.

La forma de la guía de observación y su uso son directos. Cada hoja de observación se centra en una dimensión del marco y es de una página. La hoja resume aspectos clave de las dimensiones y los objetivos para los estudiantes, junto con una lista de muestra de cuestiones a observar (señales de que las cosas van bien) en el estudiante y el profesor. Hay espacio para adaptar las observaciones a la lección de que se trate; y espacio para tomar notas. En la tabla siguiente se tienen los puntos a observar correspondientes al dominio *demanda cognitiva* de la Guía de Observación general.

DEMANDA COGNITIVA	
<i>El grado en el que las interacciones en clase crean y mantienen un medio de desafío intelectual que lleve a cada estudiante a profundizar su entendimiento del contenido y de las prácticas disciplinares. Buscamos un ‘esfuerzo productivo’.</i>	
<p>Estudiante...</p> <ul style="list-style-type: none"> • Se involucra en ideas retadoras. • Explora activamente los límites de su entendimiento actual. • Trabaja en la construcción de hábitos mentales productivos. • Razona y prueba sus ideas de modo que se conecte y abunde en lo que sabe • Explica lo que ha hecho hasta ese momento antes de pedir ayuda. • Continúa considerando sus ideas después de terminada la clase. 	<p>Profesor...</p> <ul style="list-style-type: none"> • Considera a los estudiantes como capaces de entender las ideas conceptuales clave. • Usa o adapta materiales y actividades para retar a los estudiantes y profundizar su entendimiento. • Establece normas en el aula que comprometen al estudiante con dichos materiales y actividades. • Monitorea y ajusta tareas, actividades y discusiones de modo que todos se involucren en un esfuerzo productivo. • Apoya a los estudiantes sin eliminar el desafío en el que están trabajando.
<p>Otros puntos de observación:</p>	
<p>¿Qué oportunidades tiene los estudiantes para entender el contenido y las prácticas disciplinares? ¿De qué manera se les apoya para entender y que no se sientan perdidos, manteniendo el desafío real, de modo que tengan oportunidad de hacerse de las ideas importantes?</p>	
<p>Objetivo: Todos los estudiantes tienen oportunidad de entender las ideas importantes, desarrollando entendimiento, conexiones y aplicaciones más profundas, abundando sobre lo que ya saben.</p>	

Tabla 4. Hoja correspondiente a la “demanda cognitiva” de la Guía de Observación para matemática.

La primera versión de la guía de observación fue creada por el Distrito Escolar Unificado de San Francisco (SFUSD, por sus siglas en inglés) para su propio uso. El equipo TRU modificó el documento, con licencia del SFUSD, la versión general se usará para hacer observaciones en todos los programas de preparación de profesores de la Universidad de California en Berkeley.

Instrumentos específicos del Proyecto Evaluación en Matemática

En el Proyecto Evaluación en Matemática (MAP, por sus siglas en inglés), una asociación entre la Universidad de Nottingham y la Universidad de California en Berkeley, se han producido una amplia gama de materiales de apoyo a la instrucción en concordancia con el proyecto TRU. El sitio web MAP, <http://map.mathshell.org/>, contiene los materiales descritos en esta sección, además de las herramientas y los artículos de TRU.

Lecciones de Evaluación Formativas en Matemática

Aprender a llevar a cabo una evaluación formativa, es decir, proporcionar oportunidades a los estudiantes de expresar su entendimiento, y reaccionar en el momento de modo que “se encuentre al estudiante dónde esté”, es un reto significativo, especialmente para maestros cuya experiencia principal ha sido el modelo de enseñanza *muestra y practica*. Para apoyar a los profesores en este camino, en el MAP se han producido 100 Lecciones de Evaluación Formativa (LEF) de dos o tres horas. Las lecciones fueron diseñadas con las siguientes propiedades:

- Las lecciones se centran en conceptos y prácticas matemáticos clave desde los grados 6 a 10, con 20lecciones en cada grado.
- Cada lección puede insertarse en el programa regular de cada grado, de modo que, para temas específicos, ayudan al profesor a descubrir lo que han aprendido los estudiantes, y que retos enfrentan. Proporcionan formas de abordar tales retos.
- Las lecciones (con planes de clase que se extienden a 20 páginas para apoyar el uso de una pre-evaluación y dos o tres horas de instrucción) están encaminadas a apoyar a los profesores a:
 - o Descubrir algunas malas interpretaciones con el uso de la pre evaluación y tener tiempo para pensar la manera en que se abordarían en el contenido principal de la lección;
 - o Estar preparados para la lección principal con una lista de “cuestiones comunes” que es probable que la lección saque a la luz, y formas de responder a tales cuestiones sin enseñar de nuevo el contenido (por ejemplo, planteando preguntas que hagan que el estudiante considere un ejemplo específico que desafíe sus afirmaciones, o buscar un caso en particular más simple para ver cómo funcionan las cosas);
 - o Iniciar la lección principal (¡a menudo contradictoriamente!) de modo que las ideas del estudiante se hagan públicas, y sea evidente para todos que hay cuestiones por resolver.
 - o Dirigir una serie de actividades en las que los estudiantes empleen sus ideas (haciendo carteles para su presentación, entre otras cosas) apoyados por el profesor; y
 - o Cerrar las lecciones con actividades que expandan y consoliden el aprendizaje del estudiante.

- Tal vez lo más ambicioso sea que las LEF estén diseñadas para apoyar a los profesores a cambiar su pedagogía; el objetivo sería que, al tener un andamiaje para la enseñanza de esta manera con lecciones cuidadosamente guiadas, los profesores podrían abrir su práctica de modo que sus lecciones regulares se lleven a cabo de forma diferente. Las FEL dan un andamiaje para la enseñanza de manera completamente consistente con las cinco dimensiones TRU.

Las FEL están disponibles en la página web de MAP, <http://map.mathshell.org/>. A la fecha, ha habido más de 6 000 descargas de las lecciones. La Fundación Gates, que financió el proyecto, también financió proyectos de desarrollo profesional, conocidos como el Colaborativo de Diseño de Matemática (MDC, por sus siglas en inglés), para apoyar su instrumentación. Los resultados se describen en una evaluación independiente sobre el impacto de MDC en estudiantes de álgebra de noveno grado en Kentucky (Herman, Epstein, Leon, La Torre Matrundola, Reber, y Choi, 2014):

Se esperaba que los profesores participantes instrumentaran de entre cuatro a seis LEF, lo que significaba que los estudiantes se involucraran sólo de ocho a doce días durante el año escolar. (p. 10)

Utilizamos tecnología de reciente creación para convertir el tamaño del efecto observado para MDC en un indicador general del número meses de aprendizaje representados. En relación con el crecimiento típico en matemática en noveno grado, el tamaño del efecto para MCD representa 4.6 meses de escolaridad. (p. 9)

Esto es, la ganancia promedio de aprendizaje del estudiante de 8 a 12 días de instrucción usando FEL fue de 4.6 meses. Un informe del Research for Action (2015) indica que la vasta mayoría de profesores que utilizaron FEL aprendieron nuevas estrategias que instrumentaron en su instrucción regular.

Tareas y Pruebas de Evaluación Sumaria

La evaluación sumaria debe estar alineada con los resultados de la instrucción deseados. Si las pruebas “fuera de la concha” se centran en habilidades y procedimientos, no podrán mostrar las habilidades de resolución de problemas de los estudiantes y otros impactos de una instrucción sólida. Esto es, en el mejor de los casos, desmoralizante; lo que es peor, usar tales pruebas puede tener un impacto negativo significativo en la instrucción. Tomando en cuenta lo anterior, el MAP diseñó una serie de tareas para *principiantes*, *aprendices* y *expertos* en matemática para los grados sexto a décimo. Las tareas para principiantes explícitamente prueban elementos particulares del conocimiento del contenido. Las tareas para expertos están mucho menos estructuradas, y requieren habilidades estratégicas de resolución de problemas además del conocimiento del contenido: en tales tareas los estudiantes se enfrentan a demandas de entendimiento significativas y tienen un gran margen en la elección de métodos. Las tareas para aprendices están entre estas dos. El planteamiento de problemas proporciona un andamiaje suficiente para que los estudiantes, con el requisito de resolver el problema, son orientados en la dirección de planteamientos productivos. Se necesita una *dieta balanceada* de tareas

para Principiantes, Aprendices y Expertos para evaluar adecuadamente las Prácticas Matemáticas.

Una colección de 94 tareas de evaluación sumaria se halla en <http://map.mathshell.org/tasks.php>. Cada tarea incluye una rúbrica de resultados, una colección de trabajos muestra calificados de estudiantes y el mismo conjunto de trabajos sin calificar (la práctica de calificado de este tipo de tareas puede ser una actividad efectiva de desarrollo profesional). Estas tareas pueden usarse siempre que parezca apropiado, a lo largo del año. El equipo MAP también ha hecho una compilación de varias pruebas finales, con sus rúbricas de calificación. Están disponibles en <http://map.mathshell.org/tests.php>.

Borradores para Módulos de Desarrollo Profesional

En el Proyecto de Evaluación en Matemática se han desarrollado cinco Módulos de Desarrollo Profesional diseñados para ayudar a los profesores con los retos prácticos y pedagógicos presentados en las Lecciones de Evaluación Formativa.

En el [Módulo 1](#) se introduce el modelo de evaluación formativa usado en las lecciones. El [Módulo 2](#) y el [Módulo 3](#) consideran los dos tipos de FEL (orientadas al concepto y de resolución de problemas) con detalle. En el [Módulo 4](#) y en el [Módulo 5](#) se exploran dos características pedagógicas fundamentales de las lecciones: planteamiento de preguntas probatorias y aprendizaje colaborativo.

Los módulos están basados en actividades y construidos alrededor de una colección de actividades en el aula. El objetivo es involucrar a grupos de profesores en discusiones constructivas sobre sus prácticas y cómo podrían cambiar. Se planea entonces una lección y se le pone en práctica usando estas ideas en su propio salón de clase, y se encuentran más adelante para reflexionar sobre sus experiencias.

Se trata de borradores. Los videos presentan a estudiantes de Inglaterra que trabajan en proyectos con objetivos similares. MAP espera, en última instancia, ser capaz de hacer videos que muestren los materiales en escuelas de los niveles Medio y Medio Superior. Véase <http://map.mathshell.org/pd.php>.

Red de Matemática de Comunidades de Mejora: Herramientas para la Construcción de Comunidades de Apoyo Instruccional y Administrativo

En apoyo a TRU y a las FEL, La Fundación Gates financió la Red de Matemática de Comunidades de Mejora (MathNIC, por sus siglas en inglés). La idea fue reunir distritos escolares y otros asociados para identificar los retos enfrentados al crear y mantener ambientes de entendimiento sólido, y fabricar herramientas para abordar dichos retos. En <http://mathnic.mathshell.org.uk/wordpress/> se encuentran versiones alfa (una primera revisión) de las herramientas.

Artículos y herramientas para la Comunidad de Investigación

Artículos

Se trata de una serie de artículos que describen la investigación que fundamenta las herramientas y las perspectivas de este documento. Entre los principales artículos tenemos:

Schoenfeld, A. H. (2013). Classroom observations in theory and practice. *ZDM, the International Journal of Mathematics Education*, 45: 6-7-621. DOI 10.1007/s11858-012-0483-1.

En este artículo se describe la génesis del marco TRU. Se explora la dialéctica entre la teorización de la toma de decisiones de los profesores y la producción de un esquema práctico, fundamentado en la teoría, para observaciones en clase. Uno podría pensar que una teoría integral de toma de decisiones proporcionaría las bases de un esquema de observación en clase. Sin embargo, resulta que, aunque las partes teórica y práctica se traslapan de muchas maneras, los fundamentos teóricos de un esquema de observación son suficientemente diferentes (más estrechos en cierta manera y más amplios en otra) y las restricciones de la instrumentación casi en tiempo real son tan fuertes que el esquema analítico resultante es, en muchas formas, radicalmente diferente del marco teórico que le dio origen. En este ensayo se caracteriza la evolución del esquema observacional y se reflexiona sobre éste. Proporciona detalles de algunos intentos fallidos, con el fin de documentar las complejidades de construir tales esquemas.

Schoenfeld, A. H. (2014, noviembre). What makes for powerful classrooms, and how can we support teachers in creating them? *Educational Researcher*, 43(8), 404-412. DOI: 10.3102/0013189X1455

Este artículo, y mi carrera como investigador educativo, están basados en dos suposiciones fundamentales: (1) que la investigación y la práctica pueden y deben vivir en sinergia productiva, en la que una mejora a la otra; y (2) que la investigación centrada en la enseñanza y el aprendizaje de una disciplina en particular puede, si se le caracteriza cuidadosamente, producir visiones que tienen implicaciones en un amplio espectro de disciplinas. En este artículo inicio con una breve descripción de dos cuerpos de trabajo que ejemplifican estas dos suposiciones fundamentales. Luego abundo en un tercer ejemplo, el desarrollo de un nuevo conjunto de herramientas para entender y apoyar una poderosa instrucción matemática en el aula (y por extensión, una poderosa instrucción en una amplia gama de disciplinas): el marco de referencia TRU. Al hacerlo, en este artículo ubico el *corpus* de trabajo sobre TRU en un marco de Investigación y Desarrollo mucho más grande.

Schoenfeld, A.H. (2015). Thoughts on scale. *ZDM, the international journal of mathematics education*, 47, 161-169. DOI: 10.1007/s11858-014-0662-3.

En este ensayo se reflexiona sobre los desafíos de pensar en cuestiones empíricas (de entender fenómenos como el desarrollo profesional continuo, DPC) en el nivel

de sistemas, mientras esperamos para definir los detalles más finos de la instrumentación. Los estímulos de mis reflexiones son tres estudios de intentos de estudiar la parte empírica: uno es usar las ideas relacionadas con el desarrollo profesional en dos países, la historia de cómo la investigación enmarca o no un intento nacional para apuntalar el DPC, y un estudio detallado sobre la calidad de una docena de instrumentaciones DPC por parte de mentores. El reto es “ver el bosque en vez de los árboles”, ser capaces de situar tales estudios tan diversos dentro de un marco de referencia más amplio. El cuerpo de este artículo está dedicado a ofrecer este marco, Enseñanza para un Sólido Entendimiento (TRU), que caracteriza cinco dimensiones fundamentalmente importantes propias de ambientes de aprendizaje poderosos. En el nivel más fino, TRU se aplica en el aula, estableciendo objetivos para la instrucción. Pero, de manera más general, se aplica a todos los ambientes de aprendizaje y, por tanto, caracteriza aspectos importantes del DPC. El artículo aborda cuestiones relacionadas con los tipos de coherencia sistémica necesarios para avanzar en el desarrollo profesional en la práctica.

Schoenfeld, A. H., Floden, R. B., and the Algebra Teaching Study and Mathematics Assessment Project. (2016) On Classroom Observations. Manuscrito enviado para publicación.

En este artículo se dan propuestas de marcos de referencia y rúbricas usadas para observar prácticas en el aula, haciendo notar cuándo los criterios particulares son más importantes para propósitos específicos (investigación, desarrollo profesional o evaluación). Se caracterizan las semejanzas, las diferencias y los usos de tres marcos de observación: Marco para la Enseñanza, Calidad matemática para la Instrucción y Enseñanza para Un Sólido Entendimiento de la Matemática. Se describen las formas en que cada marco de referencia evalúa instancias selectas de instrucción matemática, y se documentan las formas en que los tres marcos concuerdan y en qué difieren. Específicamente, los marcos no concuerdan en lo que se puede considerar instrucción de alta calidad. Estas diferencias tienen consecuencias, dado que los marcos son ampliamente usados en desarrollo profesional y en evaluaciones para profesores.

Swan, M., & Burkhardt, G. H. (2014) Lesson Design for Formative Assessment.

Educational Designer, Volume 2, Issue 7, available from

<http://www.educationaldesigner.org/ed/volume2/issue7/article24/index.htm>

El poder potencial de la evaluación formativa para mejorar el aprendizaje del estudiante está claro desde el punto de vista de la investigación. Sin embargo, llevarla a cabo demanda una cultura de aprendizaje diferente y una gama más amplia de enfoques de enseñanza que la que se tiene en la mayoría de las aulas de matemática. Los esfuerzos anteriores por introducir la evaluación formativa para el aprendizaje se han centrado en el desarrollo profesional del profesor. Aquí describimos un proyecto que explora cómo este cambio puede fomentarse y ser apoyado por materiales de enseñanza que integran los principios de la evaluación formativa. Describimos los retos de diseño que enfrentamos, las experiencias de investigación y de desarrollo en las que nos basamos, y los principios que

normaron nuestros diseños. Ilustramos estos elementos con ejemplos de los mismos productos, algunos resultados y las lecciones aprendidas.

Herramientas

La afirmación fundamental que subyace el Marco TRU es que el desempeño de un grupo con respecto a las cinco dimensiones de TRU está positivamente relacionado con la preparación de los estudiantes como pensadores y solucionadores de problemas flexibles, con conocimiento y con recursos. Por un lado, las dimensiones TRU se derivaron de una exhaustiva revisión de literatura y del examen de una gran cantidad de videos sobre instrucción en el aula. En consecuencia, se tiene un respaldo de la literatura. Por el otro, la oración con que iniciamos el párrafo establece una hipótesis empírica que debe probarse de manera empírica. Hacerlo requiere un mecanismo para asignar una puntuación a instancias de instrucción. Para avanzar en esa meta, el equipo TRU creo la rúbrica de puntuación TRU. Al usar la rúbrica uno puede asignar puntos de una escala de cinco (1, 1.5, 2, 2.5 y 3) para cada una de las cinco dimensiones, para una serie de configuraciones en el aula: clase completa, equipos pequeños, trabajo individual y presentaciones de estudiantes. Se pueden calcular promedios ponderados para cada dimensión. Los resultados, entonces, pueden correlacionarse con el desempeño de los estudiantes en medidas sólidas sobre el razonamiento y la capacidad de resolución de problemas de los estudiantes.

En la tabla siguiente se presenta la rúbrica.

	Matemática	Demanda Cognitiva	Acceso al contenido Matemático	Disponibilidad , Autoridad e Identidad	Uso de la Evaluación
	¿Qué tan preciso, coherente y bien justificado es el contenido matemático?	¿En qué grado se apoya a los estudiantes para tratar con los conceptos matemáticos y entenderlos?	¿En qué grado el profesor apoya un acceso al contenido para todos los estudiantes?	¿En qué grado son los estudiantes la fuente de ideas y de su discusión? ¿Cómo se atienden las contribuciones de los estudiantes?	¿En qué grado surge el pensamiento matemático del estudiante; en qué grado se abunda en las ideas del estudiante cuando son valiosas o se atienden errores cuando se dan?
1	Las actividades son ambiguas u orientadas a habilidades, sin oportunidad para involucrarse con el contenido clave (como se especifica en el currículo)	Las actividades están estructuradas de modo que el estudiante casi siempre aplica procedimientos memorizados y trabaja con ejercicios de rutina.	Hay acceso diferenciado al contenido o a la participación, y no se notan esfuerzos para revertir la situación.	El profesor inicia conversaciones. El turno de los estudiantes es corto y están restringidos por lo que el profesor dice o hace.	No se ve el razonamiento del estudiante ni se le busca. Las acciones del profesor se limitan a una retroalimentación correctiva o a dar ánimos.

	Matemática	Demanda Cognitiva	Acceso al contenido Matemático	Disponibilidad, Autoridad e Identidad	Uso de la Evaluación
2	Las actividades están en el nivel adecuado, pero principalmente están orientadas a procesos, con poca oportunidad para hacer conexiones (por ejemplo, entre procedimientos y conceptos) o tienen poca coherencia matemática	Las actividades poseen riqueza conceptual o son retos, pero las intervenciones del profesor tienden a eliminar el reto, eliminando la oportunidad de hacer un esfuerzo productivo.	Hay un acceso desigual al contenido o a la participación, pero el profesor hace algunos esfuerzos para dar acceso a un buen número de estudiantes.	Los estudiantes tienen oportunidad de explicar parte de su razonamiento, el profesor dirige la conversación y decide qué es correcto. En discusión las ideas del estudiante no se exploran o no se les considera en otras ideas.	El profesor se refiere al razonamiento del estudiante, incluso sobre errores comunes, pero no se abunda en ideas específicas (cuando son potencialmente valiosas) o se les usa para poner retos (cuando son problemáticas).
3	Las actividades propician conexiones significativas entre procedimientos, conceptos y contextos y dan oportunidad para construir una visión coherente de la matemática.	Las sugerencias del profesor (o andamiaje) fomentan en el estudiante el esfuerzo productivo en la construcción de entendimientos y su compromiso con prácticas matemáticas.	El profesor activamente fomenta, y lo logra hasta cierto punto, una amplia y significativa participación; o lo que parecen ser estructuras de participación establecidas producen tal participación.	Los estudiantes explican sus ideas y razonamientos. El profesor puede dar crédito a los estudiantes por sus ideas, y los estudiantes responden construyendo ideas basados en las ideas de los demás.	El profesor solicita que el estudiante especifique sus razonamientos y la instrucción posterior responde a tal razonamiento con actividades productivas o atendiendo los errores que están surgiendo.

Tabla 5. Rúbrica TRU para evaluación sumaria.

Este manual de puntuación fue construido usando videos a los que el colectivo TRU tenía derecho de acceso, de modo que no se puede distribuir. Actualmente estamos actualizando el manual, aunque las categorías y la puntuación son sólidas. Los investigadores interesados pueden contactar a Alan Schoenfeld en alans@berkeley.edu para discutir el uso de la rúbrica para calificar o asignar notas.

Referencias

- American Association of University Women. (1992). *How Schools Shortchange Girls*. Washington, DC: AAUW and NEA.
- Baldinger, E. Louie, N., and the Algebra Teaching Study and Mathematics Assessment Project. (2016). *TRU Math conversation guide: A tool for teacher learning and growth (mathematics version)*. Berkeley, CA & E. Lansing, MI: Graduate School of Education, University of California, Berkeley & College of Education, Michigan State University. Retrieved from: <http://ats.berkeley.edu/tools.html> and/or <http://map.mathshell.org/materials/pd.php>.
- Black, P., Harrison, C., Lee, C., Marshall, B., & Wiliam, D. (2003). *Assessment for learning: Putting it into practice*. Buckingham, UK: Open University Press.
- Black, P., & Wiliam, D. (1998a). Inside the black box: Raising standards through classroom assessment. *Phi Delta Kappan*, 80(2), 139–147.
- Black, P. and Wiliam, D. (1998b). Assessment and classroom learning. *Assessment in Education*, 5(1), 7-74.
- Boaler, J. (2008). Promoting Relational Equity in Mathematics Classrooms – Important Teaching Practices and their impact on Student Learning. *Proceedings of the 10th International Congress of Mathematics Education (ICME X)*, 2004, Copenhagen.
- Brownell, J., Mahon, J., & Seward, R. (2016). TRU and the CPS Plan for Mathematics: Building Mathematically Powerful Classrooms. Presentation at the 15th annual Chicago Lesson Study Conference, Chicago, IL, May 6, 2016.
- Cohen, E.G. (1994). *Designing groupwork: Strategies for heterogeneous classrooms* (Revised edition). New York: Teachers College Press.
- Cohen, E. G. & Lotan, R. A. (Eds.). (1997). *Working for equity in heterogeneous classrooms: Sociological theory in practice*. New York: Teachers College Press.
- de Lange, J. (1999). *A framework for classroom assessment in mathematics* (Unpublished manuscript). Madison, WI: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science, Assessment Study Group.
- Dweck, C. (2007). *Mindset: The new psychology of success*. New York: Ballantine.
- Engle, R. A. (2011). The productive disciplinary engagement framework: Origins, key concepts, and continuing developments. In D. Y. Dai (Ed.), *Design research on learning and thinking in educational settings: Enhancing intellectual growth and functioning* (pp. 161-200). London: Taylor & Francis.
- Henningsen, M., & Stein, M.K. (1997). Mathematical tasks and student cognition: Classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(5), 524-549.
- Herman, J., Epstein, S., Leon, S., La Torre Matrundola, D., Reber, S., & Choi, K. (2014). *Implementation and effects of LDC and MDC in Kentucky districts* (CRESST

- Policy Brief No. 13). Los Angeles: University of California, National Center for Research on Evaluation, Standards, and Student Testing (CRESST).
- Hess, K. (2006). Exploring cognitive demand in instruction and assessment. Downloaded April 1, 2015 from http://www.nciea.org/publications/DOK_ApplyingWebb_KH08.pdf.
- Hess, K. (2013). A guide for using Webb's depth of knowledge with common core state standards. Retrieved April 1, 2015, from <https://education.ohio.gov/getattachment/Topics/Teaching/Educator-Evaluation-System/How-to-Design-and-Select-Quality-Assessments/Webbs-DOK-Flip-Chart.pdf.aspx>
- Institute for Learning. (2016). Accountable talk. Retrieved from http://ifl.pitt.edu/index.php/educator_resources/accountable_talk.
- Louie, N., Baldinger, E. and the Algebra Teaching Study and Mathematics Assessment Project. (2016). *TRU Math conversation guide: A tool for teacher learning and growth (Domain-general version)*. Berkeley, CA & E. Lansing, MI: Graduate School of Education, University of California, Berkeley & College of Education, Michigan State University. Retrieved from: <http://ats.berkeley.edu/tools.html> and/or <http://map.mathshell.org/materials/pd.php>.
- Moll, L., Amanti, C., Neff, D., & Gonzalez, N. (1992). Funds of knowledge for teaching: Using a qualitative approach to connect homes to classrooms. *Theory into Practice*, XXXI (2), 132-141.
- National Research Council. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. J. Kilpatrick, J. Swafford, and B. Findell (Eds.). Mathematics Learning Study Committee, Center for Education, Division of Behavioral and Social Sciences and Education. Washington, DC: National Academy Press.
- Oakes, J., Joseph, R., & Muir, K. (2001). Access and achievement in mathematics and science. In J. A. Banks & C. A. McGee Banks (Eds.), *Handbook of research on multicultural education* (pp. 69-90). San Francisco: Jossey-Bass.
- Research for Action. (2015). *MDC's Influence on Teaching and Learning*. Philadelphia, PA: Author. Retrieved March 1, 2015 from <https://www.researchforaction.org/publications/mdcs-influence-on-teaching-and-learning/>
- Resnick, L., O'Connor, C., and Michaels, S. (2007). Classroom Discourse, Mathematical Rigor, and Student Reasoning: An Accountable Talk Literature Review. Downloaded July 9, 2008 from http://einstein.pslc.cs.cmu.edu/research/wiki/images/f/ff/Accountable_Talk_Lit_Review.pdf
- Schoenfeld, A. H. (2002). Making mathematics work for all children: Issues of standards, testing, and equity. *Educational Researcher*, 31(1), 13-25.
- Schoenfeld, A. H. (2013). Classroom observations in theory and practice. *ZDM, the International Journal of Mathematics Education*, 45: 607-621. DOI 10.1007/s11858-012-0483-1.

- Schoenfeld, A. H. (2014, November). What makes for powerful classrooms, and how can we support teachers in creating them? *Educational Researcher*, 43(8), 404-412. DOI: 10.3102/0013189X1455
- Schoenfeld, A.H. (2015). Thoughts on scale. *ZDM, the international journal of mathematics education*, 47, 161-169. DOI: 10.1007/s11858-014-0662-3.
- Schoenfeld, A. H., Floden, R. B., and the Algebra Teaching Study and Mathematics Assessment Project. (2016). On Classroom Observations. Manuscript submitted for publication.
- Schoenfeld, A. H., and the Teaching for Robust Understanding Project. (2016a). *The Teaching for Robust Understanding (TRU) observation guide: A tool for teachers, coaches, administrators, and professional learning communities*. Berkeley, CA: Graduate School of Education, University of California, Berkeley. Retrieved from: <<http://TRU.berkeley.edu>> or <<http://map.mathshell.org/>> or <<http://ats.berkeley.edu/>>.
- Schoenfeld, A. H., and the Teaching for Robust Understanding Project. (2016b). *The Teaching for Robust Understanding (TRU) observation guide for mathematics: A tool for teachers, coaches, administrators, and professional learning communities*. Berkeley, CA: Graduate School of Education, University of California, Berkeley. Retrieved from: <<http://TRU.berkeley.edu>> or <<http://map.mathshell.org/>> or <<http://ats.berkeley.edu/>>.
- SERP (2016). Word Generation home. http://wordgen.serpmedia.org/academic_vocabulary-and-apt.html.
- Shafer, M.C. & Romberg, T.A. (1999). Assessment in classrooms that promote understanding. In E. Fennema & T.A. Romberg (Eds.), *Mathematics Classrooms that Promote Understanding* (pp.159-184). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Shepard, L. A. (2000). *The Role of Classroom Assessment in Teaching and Learning*. (CSE Technical Report 517). Los Angeles: University of California, National Center for Research on Evaluation, Standards, and Student Testing (CRESST)
- Stein, M.K. & Smith, M.S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3, 268-275.
- Swan, M., & Burkhardt, G. H. (2014). Lesson Design for Formative Assessment. *Educational Designer*, Volume 2, Issue 7, available from <http://www.educationaldesigner.org/ed/volume2/issue7/article24/index.htm>
- Webb, N. (1997). Research Monograph Number 6: "Criteria for alignment of expectations and assessments on mathematics and science education. Washington, D.C.: CCSSO."
- Webb, N. (2002). Depth-of-Knowledge Levels for Four Content Areas. Retrieved April 1, 20105 from <http://schools.nyc.gov/NR/rdonlyres/2711181C-2108-40C4-A7F8-76F243C9B910/0/DOKFourContentAreas.pdf>.
- Wernet, J., & Lepak, J. (2014). *TRU Math conversation guide, Module A: Contextual Algebraic Tasks*. Berkeley, CA & East Lansing, MI: Graduate School of Education,

University of California, Berkeley & College of Education, Michigan State University. Retrieved from: <http://ats.berkeley.edu/tools.html> and/or <http://map.mathshell.org/materials/pd.php>.

Agradecimientos

Este documento se basa en una introducción anterior (y en una revisión de literatura) titulada *Introducción a las Dimensiones de TRU Math*, elaborada por el Estudio de Enseñanza del Álgebra y el Proyecto de Evaluación en Matemática.

El Proyecto TRU ha recibido apoyo de:

- The Algebra Teaching Study (NSF financiamiento DRL-0909815 y DRL-0909851 a Alan Schoenfeld y Robert Floden)
- The Mathematics Assessment Project (Financiamiento de la Bill and Melinda Gates Foundation, Grant OPP53342 a PIs Alan Schoenfeld, Hugh Burkhardt y Malcolm Swan)
- Networked Improvement Community to Support Common Core State Standards Implementation (Bill and Melinda Gates Foundation financiamiento OPP1115160, a PIs Alan Schoenfeld, Hugh Burkhardt y Malcolm Swan)
- TRUmath y Lesson Study: Supporting Fundamental and Sustainable Improvement in High School Mathematics Teaching (National Science Foundation financiamiento 1503454, a PIs Alan Schoenfeld, Suzanne Donovan, y Catherine Lewis, y Philip Tucher)

Los autores están muy agradecidos con las fundaciones por su apoyo. Los autores, y no las fundaciones, son responsables por el trabajo descrito en este documento.