Modelación en la enseñanza: el problema del peso de L'Hospital

France Caron, Université de Montréal
Kathleen Pineau, École de technologie supérieure

Presentamos una actividad de modelación, tal como ha sido experimentada con estudiantes del curso de matemáticas de nivelación en la École de technologie supérieure (ÉTS). Jugando con un montaje físico de una situación presentada por Johann Bernoulli al Marqués de L'Hospital, los estudiantes tienen que modelar la situación para determinar de manera general y con la ayuda de la tecnología, donde se encuentra la posición de equilibrio del sistema. Esta actividad es el resultado de una colaboración con profesores de física y tienen en cuenta los objetivos del contenido del curso. La actividad está más guiada que las actividades usualmente consideradas como actividades de modelación. Dicho esto, nos proponemos enseñar como la actividad contribuye al desarrollo de estrategias de modelación dentro de lo que se revela posible en este curso. También se presenten adaptaciones y enriquecimientos útiles a otros contextos y niveles educativos.

Introducción

La modelación ha sido un tema de investigación de creciente interés en didáctica de las matemáticas, aún antes de que se encontrara en el currículo matemático (Lingefjärd 2007). En el mundo de la investigación, el énfasis ha sido puesto sobre la resolución de problemas auténticos y abiertos, donde los alumnos eligen los conceptos matemáticos que puedan ayudar en esa resolución. A pesar de que algunos planes de estudio nacionales, cursos o programas universitarios específicos se refieren claramente a la modelación como objetivo o enfoque del aprendizaje de las matemátic as, todavía se requiere un esfuerzo sustancial para hacer de la modelación una realidad en la mayoría de las clases de matemáticas. Como los profesores todavía tienen que experimentar la modelación por ellos mismos, les resulta difícil apreciar las potencialidades del uso de tareas de modelación en sus aulas (Ng, 2013). El desafío es todavía mayor en los cursos que son esencialmente orientados al contenido, y en los cuales las limitaciones de tiempo parecen impedir que los estudiantes vivan una actividad de modelación rica y cumplir los objetivos perseguidos. En esos cursos, introducir problemas en los que los conceptos que se acaban de enseñar pueden aplicarse directamente, parece ser lo mejor que un profesor pueda hacer para conectar las matemáticas con algunos de sus usos en el "mundo real".

Con la enseñanza de funciones, este interés en problemas de aplicación directa tiende a reducir en muchos programas escolares las actividades de modelación a ejercicios de ajuste de curvas. Esas técnicas pueden asociarse al paradigma empírico de la modelación (Maull y Berry, 2001), cuyo objetivo principal es predecir algunos comportamientos. Si la tarea de encontrar esas relaciones se deja principalmente a la calculadora u otra herramienta informática, la experiencia del proceso de modelación se reduce a pasar directamente de los datos recogidos al modelo matemático, sin control sobre la estructura matemática. Como consecuencia, la contribución epistémica de tales actividades queda bastante limitada. Además, el uso sistemático de procedimientos de regresión pre programados, cuya teoría no se enseña en el nivel secundario, también hace correr el riesgo de promover implícitamente tanto el uso de cajas negras en matemáticas como la subversión de la realidad mediante opciones disponibles en los menús de calculadoras (Galbraith 2007). No sólo se debe poner en duda la calidad de las predicciones hechas así, sino que también se tendría que examinar el impacto de esta manera de producir modelos sobre la concepción de la ciencia en los estudiantes.

Para entender el funcionamiento interno de una situación y mantener control sobre el modelo matemático utilizado, es necesario pasar del *paradigma empírico* (simplemente destinado a predecir a partir de datos) al *paradigma teórico* (con el objetivo de comprender) para modelar la situación (Maul y Berry, 2001). En el paradigma teórico, uno se centra en la búsqueda de los procesos subyacentes, identificando leyes y principios apropiados, que puedan provenir de otra disciplina y con los cuales se pueda construir un modelo y validarlo con datos. Maull y Berry señalaron que los estudiantes suelen abordar un problema con el paradigma empírico, incluso cuando un enfoque teórico sería accesible y más apropiado.

La modelación matemática

La modelación matemática puede ser vista como el proceso de resolución de problemas que se encuentran en situaciones de la vida real, con toda su complejidad. Ha sido descrita como un proceso multietapa y cíclico (Blum et al., 2002). Varios diagramas han sido propuestos para representar este proceso. Presentamos el nuestro (Figura 1), que está bastante cerca de la descripción encontrada en Blum et al. (2002), con la adición de algunos elementos que nos parecen importantes incluir.

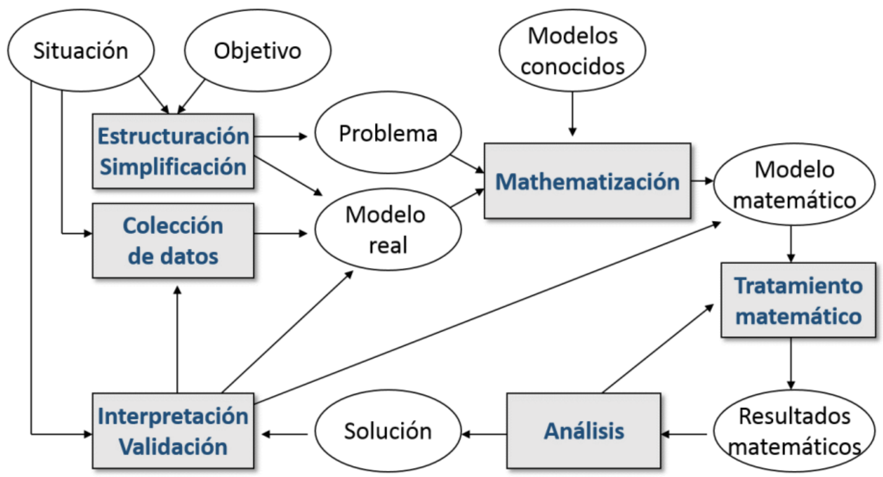


Figura 1 – Una representación del proceso de modelación matemática

La modelación comienza con una situación particular del mundo real y un objetivo que uno quiere cumplir con esa situación. El objetivo puede ser: predecir la evolución de la situación, comprender cómo ha surgido tal fenómeno, tomar una decisión, desarrollar u optimizar un sistema que ayude a manejar la situación, etc. Se simplifica la situación haciendo algunos supuestos y extrayendo algunas entidades clave (objetos, atributos, variables,...) que hay que considerar. La reformulación del objetivo en función de estos elementos conduce al problema que habrá que resolver. Entre los elementos elegidos de la situación, algunas relaciones pueden ser anticipadas o esbozadas. Estas conexiones se derivan típicamente de unos principios conocidos, pero también pueden ser inferidos en parte de los datos existentes y, junto con los objetos y atributos a los que se refieren, forman una estructura con la cual se puede examinar la situación. Una representación de esta versión simplificada de la situación, que aún no ha sido completamente matematizada, es lo que se entiende por modelo real.

Transformar este modelo real en un modelo matemático es el objeto de la fase siguiente. Aunque el modelo matemático resultante pueda ser original, al menos para él que lo construye, uno se apoya típicamente en modelos matemáticos conocidos, seleccionándolos, combinándolos y adaptándolos a la situación para resolver el problema.

Una vez que se ha definido un modelo matemático, se puede recurrir a técnicas matemáticas para tratar de resolver el problema o explorar varios escenarios. Para que una solución sea considerada válida, no sólo debe ser coherente con el modelo de la situación (por ejemplo, verificando las ecuaciones), sino que también debe ser compatible con la situación inicial; debe tener sentido dentro de su contexto de origen. Tal validación puede conducir a una nueva iteración del ciclo, donde se puede revisar algunos de los supuestos iniciales, considerar más variables, recopilar más (o mejor) datos si se considera apropiado, tratar de generalizar y reanudar todo el proceso de nuevo.

Como se puede ver, la modelación es un proceso complejo y exigente que puede parecer difícil integrar dentro de un curso regular de matemáticas. La actividad que sigue ha sido diseñada con los objetivos de favorecer una síntesis de conocimientos relativos a las funciones y a la trigonometría, introducir al cálculo diferencial y caber dentro de una lección de un curso de nivelación. Sin embargo, se aprovechó de la oportunidad para hacer vivir a los estudiantes una experiencia de elaboración y de validación de un modelo.

La actividad

La actividad El peso de L'Hospital fue concebida en invierno 2009 en el marco de una colaboración (Caron y Savard, 2012) de investigación y desarrollo de tipo cooperativo, reagrupando a profesores y consejeros pedagógicos de secundaria y profesores de la escuela de ingeniería técnica École de technologie supérieure (ÉTS) en Montreal, Quebec, Canadá. El problema del peso de L'Hospital se presenta bien en el curso de nivelación de ÉTS cuyo objetivo es revisar las matemáticas de secundaria introduciendo al cálculo diferencial. La actividad ha sido experimentada repetidas veces desde el otoño 2011 en el marco del curso dado por la coautora (Caron y Pineau, 2013). Damos cuenta aquí de los resultados de las experimentaciones y completamos con adaptaciones y extensiones posibles.

El problema del peso

El marqués de L'Hospital, (Paris 1661-1704) fue uno de los primeros estudiantes de Johann Bernoulli (Basel, Suiza, 1667-1748). En 1691, Bernoulli permaneció muchos meses en Paris enseñando al marqués la matemática más actual en aquellos tiempos: *el cálculo diferencial*. Para ilustrar la eficiencia de este nuevo campo, Bernoulli le presentó el problema de peso del que hablaremos aquí. En 1696, L'Hospital publicó el libro *Calculi infinitesimalis pars I, seu calculus differentialis*, en el que se encuentra el enunciado original en latín del Problema del peso conocido en la actualidad como *Problema del Peso de L'Hospital.*

Una cuerda se encuentra atada a una polea y su extremo izquierdo está fijo a una barra horizontal. Otra cuerda se encuentra atada en el derecho de la barra, pasa por la polea y se lleva un peso en su otro extremo (Figura 2). El problema es predecir la posición de equilibrio del peso conociendo la longitud entre los dos puntos de fijación en la barra horizontal, la longitud de la cuerda atada a la polea y la de la cuerda atada al peso.

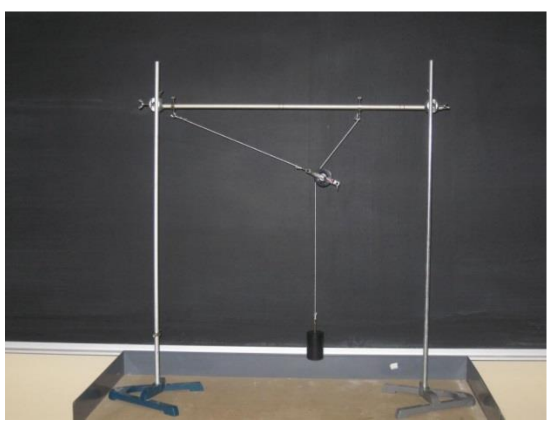


Figura 2 – El montaje

Es decir, una vez el sistema estabilizado en el estado de equilibrio (Figura 3) y conociendo valores de los parámetros *a*, *D* y *L*, se intenta determinar la posición (x,y) del peso. Este problema pide establecer un conjunto de relaciones que une los tamaños del sistema y de asociar el equilibrio del sistema a un estado óptimo. Así, la resolución del problema exige proceder a una modelación matemática de la situación, pero eso no resulta fácil para los estudiantes. Con el mismo problema y la ayuda de una calculadora CAS, Drijvers (1999) observó las dificultades de los estudiantes en sus intentos de trabajar con una forma generalizada del problema; les atribuyó a la confusión entre variables y parámetros. Por consiguiente, nuestra versión de la actividad fue diseñada con la intención de sostener el pasaje a la matematización del problema general.

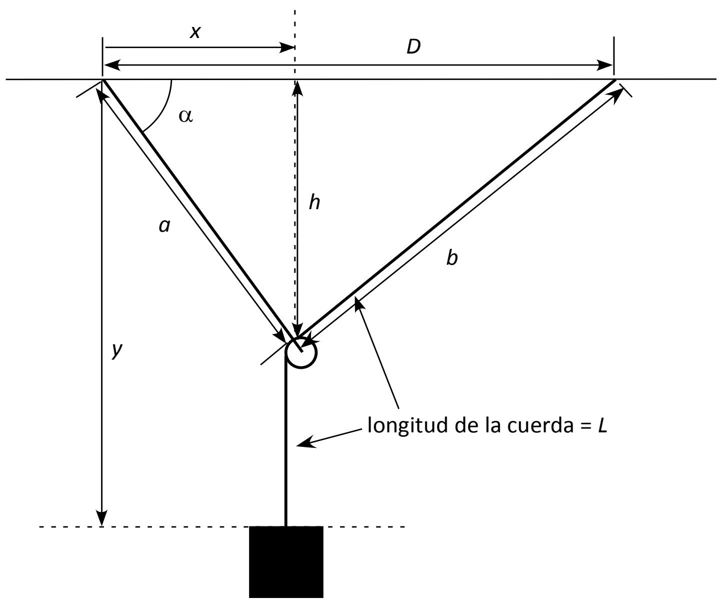


Figura 3 – Un modelo geométrico

En el aula

Jugando con un montaje físico que implica cuerdas, peso y polea, los estudiantes intentan determinar y tratan de explicar la posición de equilibrio del sistema, con la ayuda de la trigonometría y con el cálculo diferencial. Un cuaderno de trabajo detallado de una decena de páginas guía el desarrollo de la actividad, y permite consignar el conjunto de las observaciones y los resultados.

La actividad se realiza en tres etapas.

1. Los alumnos comienzan por familiarizarse con los diferentes componentes del montaje por una exploración cualitativa. Verifican por ejemplo si la posición de equilibrio de la polea cambia cuando se modifica la longitud de su cuerda. Examinan también de que manera los diferentes tamaños cambian cuando se cambia la posición de la polea. El enunciado de la actividad los conduce a distinguir las variables de los parámetros de la situación, y a asociar con lugares geométricos ciertos invariantes.

   Precisan luego las relaciones que existen entre las diferentes longitudes construyendo fórmulas que implican las funciones trigonométricas. El orden en el cual son presentadas las fórmulas que deben establecer permite de construir sobre los conocimientos anteriores, de modo progresivo, incitando la sustitución de variables por expresiones equivalentes obtenidas anteriormente. Los estudiantes verifican las fórmulas tan construidas tomando medidas sobre el montaje.

2. El modelo matemático del montaje es puesto a prueba cuando cada uno de los equipos recibe una hoja distinta sobre la cual son precisados los valores de tres parámetros: las longitudes (*a* y *L*) de las cuerdas y la distancia (*D*) entre los dos puntos de fijación. A partir de estos valores y fórmulas que establecieron, los estudiantes intentan determinar la posición de equilibrio del peso. Apoyándose en la intuición que tienen de la física del sistema que sugiere que el peso se parará cuando estará en el punto más bajo, buscan entonces maximizar la función que construyeron para describir la distancia *y* con arreglo al ángulo α :

   $$y = a\sin(\alpha) + L - \sqrt{a^2 + D^2 - 2aD\cos(\alpha)}$$

   Esta maximización se hará primero con la ayuda de la representación gráfica de la función, y luego con la ayuda del cálculo diferencial. Para verificar su respuesta, preparan el montaje con las longitudes que les han sido impuestas y verifican si el peso verdaderamente se ubica allí dónde lo habían previsto.

3. Finalmente, volverán a la situación de partida para apreciar como las fórmulas reflejan sus intuiciones iniciales o permiten ajustarlas.

Algunas observaciones

El primer público fue el de los cursos de nivelación en matemáticas en la ÉTS dados por la coautora. Una primera experimentación en clase se efectuó en otoño 2011, en dos grupos diferentes; esencialmente son las observaciones hechas durante la actividad, en clase o a partir de las copias recogidas, de las que daremos cuenta aquí. Estas observaciones serán completadas por los resultados a un sondeo corto que invitará a los estudiantes que testimonian su grado de apreciación de la actividad y de lo que lo retiraron.

La actividad, que ha sido repetida después, generalmente se celebra sobre un período de las 3 horas; se hace en equipos de dos o tres personas, y estos equipos son determinados por la profesora, para equilibrar las fuerzas (Figura 4). Cada uno de los equipos tiene su propio montaje, instrumentos de medida y calculadoras simbólicas (TI Nspire CX CAS, Figura 5). La profesora circula a lo largo de la actividad para responder a las cuestiones y asegurar una progresión continua. Además, el cuaderno sugiere en los lugares oportunos, los modos de utilización de la calculadora a privilegiar, los cuales reflejan prácticas de programación eficaces como la utilización de parámetros fácilmente modificables. Cada equipo devuelve una copia del cuaderno de trabajo a final del período y es parte de los elementos evaluados en el curso.

Figura 4 – En el aula

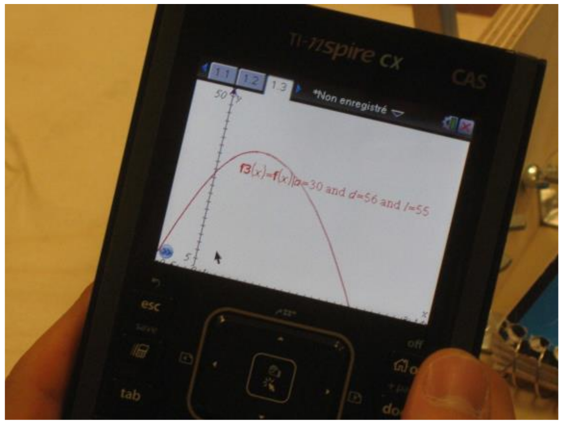


Figura 5 - La calculadora TI Nspire CX CAS

La instalación de los montajes en la clase da lugar a una variedad de configuraciones. Su observación conduce rápidamente a rechazar la intuición inicial según la cual el peso se parará cuando esté a la misma distancia de ambos puntos de atadero.

En el momento de la exploración del sistema, los estudiantes deben determinar el lugar geométrico descrito por la polea cuando se la hace moverse manteniendo fijadas las longitudes de las cuerdas y la distancia entre sus puntos de atadero. Aunque la polea parece atada a ambas cuerdas, esencialmente es aquella sobre la que es fijada que determina la trayectoria, un arco de círculo simple cuya esta cuerda es el rayo. El extracto (Figura 6) del trabajo de un equipo el ilustre claramente.

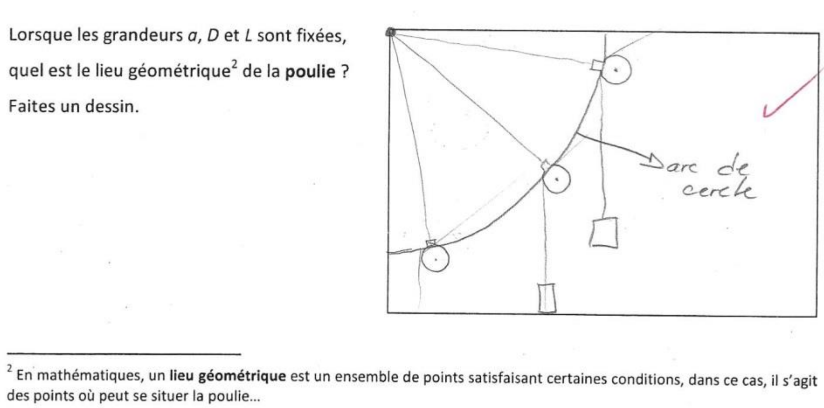


Figura 6 – El lugar geométrico de la polea

Algunos equipos procuran asociar con una función del repertorio conocido la curva descrita por la polea (Figuras 7 y 8). Esta conducta nos parece sintomática de aquel a lo que a menudo se reduce la modelación en la enseñanza de las matemáticas.

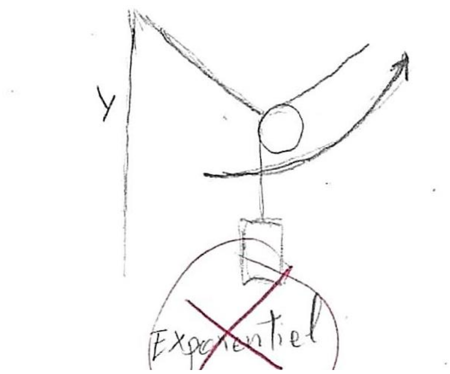


Figura 7 – ¿Una función exponencial?

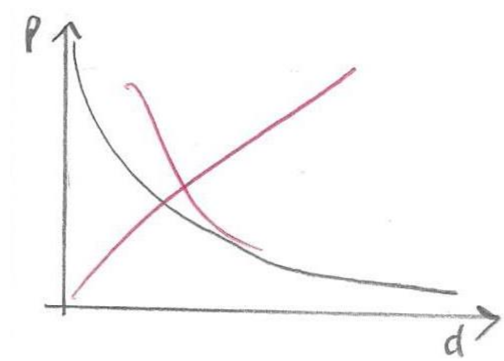


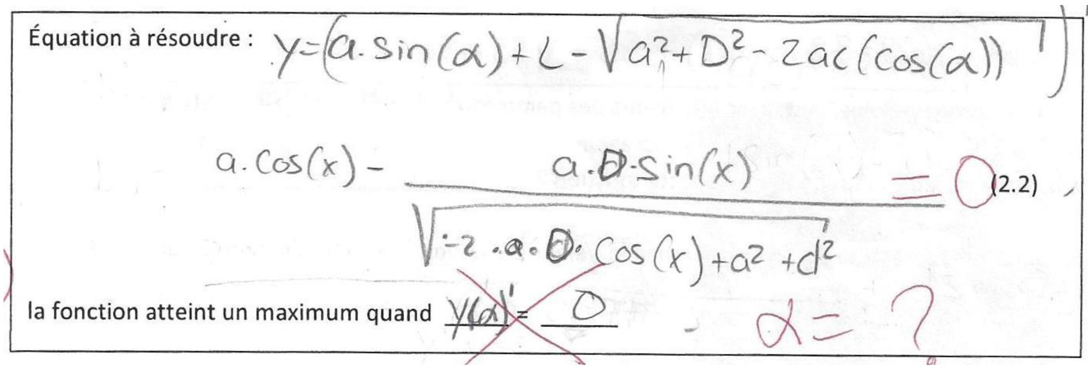
Figura 8 – ¿Una función racional?

El tiempo pasado al inicio de la actividad al manipular y a describir el sistema de modo cualitativo se muestra portador para la continuación, cuando se trata de determinar la función a optimizar y de interpretar las ecuaciones, las variables y los parámetros. Los estudiantes vuelven regularmente al montaje para comprender mejor el sentido y el alcance de las ecuaciones que construyen, o a la inversa, para revisar su aprensión inicial de la situación a la luz del modelo que establecieron.

La construcción de las ecuaciones, guiada de modo progresivo, con ecuaciones con hoyos sugiriendo fuertemente los elementos a colmar, pasa sin gran dificultad. Los estudiantes son los primeros sorprendidos de comprobar la complejidad de la función que acaban por construir y la facilidad relativa con la cual llegaron allá. Además, la posibilidad de verificar localmente sus fórmulas con las medidas del montaje los hace autónomos en su validación.

El recurso a la calculadora simbólica le favorece la vinculación de las representaciones simbólicas y gráficas de la función estudiada y conduce a de interesantes interrogatorios entre los estudiantes. La elección de la ventana en el momento de la optimización por el gráfico los hace volver sobre la elección de la unidad para describir el ángulo (grados o radianes), mientras que la optimización por el cálculo diferencial prestado asistencia por la calculadora confronte a veces con ciertas incomprensiones de naturaleza lingüística.

Entra la función que hay que optimizar y la ecuación que hay que resolver, la distinción no es siempre comprendida y cuando esto se refleja en los pedidos sometidos a la calculadora, el mensaje de error que resulta de eso o los valores extraños devueltos para la solución invitan a una segunda lectura de la situación (Figura 9).



Équation à résoudre : $y=\left(a.\sin(\alpha)+L-\sqrt{a^2+D^2-2ac(\cos(\alpha))}\right)$

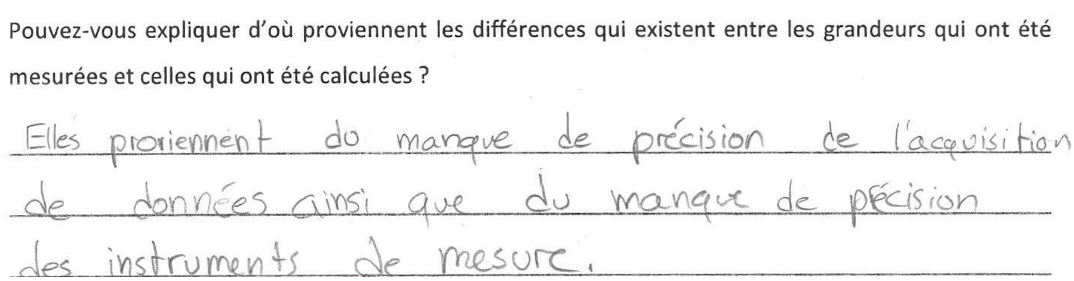
$$a.\cos(x)-\frac{a.D.\sin(x)}{\sqrt{-2.a.D.\cos(x)+a^2+d^2}}=0 \quad (2.2)$$

la fonction atteint un maximum quand $\cancel{y(\alpha)'}=$ 0 $\alpha = ?$

Los símbolos de corrección "=0" y "α = ?" se añadieron por la profesora.

Figura 9 – Confusión entre ecuación y función

La actividad conduce también a reflexionar sobre las razones de las diferencias entre los valores calculados y los valores medidos (Figura 10).



Pouvez-vous expliquer d'où proviennent les différences qui existent entre les grandeurs qui ont été mesurées et celles qui ont été calculées ?

Elles proviennent do manque de précision de l'acquisition de données ainsi que du manque de pécision des instruments de mesure.

Figura 10 –Explicaciones de las diferencias

Es sorprendente de comprobar que la inmensa mayoría de los equipos atribuyen estas diferencias a la falta de precisión de las medidas y de los instrumentos. Pocos estudiantes refieren a las simplificaciones que inspiraron al modelo matemático y que introdujeron a su vez una parte de error. En particular aquí, la hipótesis según la cual el sistema se estabiliza cuando el peso es lo más bajo se mantiene solo si la masa de la polea es despreciable con relación a la del peso.

Apreciación general de la actividad

Entre los aprendizajes que dicen haber realizado gracias a la actividad, los estudiantes del curso de nivelación en el ÉTS dicen haber desarrollado durante la actividad una maestría más grande de la trigonometría y de su utilización, particularmente con la ley del coseno. El sentido de la derivada, su utilidad y la manera de utilizarlo también ganaron en claridad. Varios subrayan también haber mejor comprendido cómo utilizar su calculadora, en particular para la representación gráfica de una función y para el cálculo de derivada. Pero más que todo, son los lazos que la actividad permite hacer que los estudiantes dicen haber retenido: cómo establecer relaciones entre las variables, cómo ciertos grandores físicos se hacen parámetros de funciones, cómo las longitudes de los lados de un triángulo pueden ser vinculadas a sus ángulos, y cómo las matemáticas permiten verificar y precisar sus primeras intuiciones.

Si hay una cosa que permanece vaga para algunos a la salida de la actividad, es el cálculo a la mano de la derivada buscada. En esto, la actividad prepara bien en el curso de cálculo que sigue, creando la necesidad de este conocimiento, coincidiendo así con la intención de Bernoulli.

En el momento de esta primera experimentación, cerca de 80 % de los estudiantes de la ÉTS declaró que le había gustado mucho la actividad, y al 20% le había gustado un poco. El carácter dicho *concreto* y *visual* de la actividad, así como la posibilidad de manipular se mencionaron por varios estudiantes como elementos particularmente incitativos. Apreciaron también poder revisar bien y aplicar en tal contexto las nociones de trigonometría y de cálculo diferencial vistas al curso: *Teoría puesta en práctica*, como lo resumió un estudiante. Si algunos de ellos asocian generosamente esta situación de aprendizaje a *la verdadera vida*, otros fueron sensibles a su *carácter histórico*. La posibilidad de adivinar por el cálculo allí dónde se estabilizará el sistema también sedujo a ciertos estudiantes. Otros por fin apreciaron ver un enfoque diferente que el vista física (con los diagramas de fuerzas) para llegar a tal predicción.

Sobre un plano más didáctico, el diseño del cuaderno de aprendizaje recibió opiniones favorables, particularmente con la autonomía que confería en el trayecto de la situación. También han sido mencionados como elementos apreciados *la posibilidad de validar y de recuperar sus errores* así como la *de jugar y construir fórmulas complejas y universales*.

Las solas reservas emiten concernían a los aspectos materiales del montaje (fragilidad del montaje, los ajustes de las cuerdas, la precisión de las medidas) y, para un equipo solamente, la dificultad sentida a progresar al mismo ritmo que todos. Después, a la luz de estos comentarios, mejoramientos fueron aportados a ciertas componentes del montaje.

Una modelación guiada

La interacción con el aparato físico favorece una entrada en el proceso de modelación. En primer lugar, proporciona un entorno de aprendizaje que permite a los estudiantes apoyarse sobre el objeto concreto en varias fases del ciclo de modelación: explorar y anticipar el comportamiento del sistema, formular su modelo e interpretar y validar las fórmulas que construyen. En segundo lugar, con la posibilidad de cambiar tanto la longitud de las dos cuerdas como la distancia entre sus extremos, ofrece la posibilidad de probar varias configuraciones. Estos beneficios pueden realizarse con un simulador, pero el aparato físico ofrece ventajas adicionales. Se enfrenta a las diferencias entre los resultados producidos por un modelo matemático y las medidas sobre el objeto real. Además, con el esfuerzo necesario para cambiar las longitudes implicadas (deshaciendo los tornillos, ajustando la longitud y rehaciendo los tornillos), en lugar de simplemente mover la polea y observar la posición resultante del peso, ayuda a distinguir entre los parámetros y las variables de la situación.

Para caber dentro del tiempo asignado e introducir a estrategias útiles para la modelación, la actividad está bastante guiada. Mientras los estudiantes tienen toda libertad para manipular el montaje y explorar la situación, se orienta su estructuración con preguntas como "¿cambia la posición de equilibrio de la polea cuando se modifica la longitud de su cuerda?" Sin embargo, llegan a experimentar, dentro de una versión cualitativa del paradigma empírico, un análisis sistemático del papel distinto de los parámetros, una estrategia que podrían reinvertir en una situación futura.

Aunque se utilicen datos empíricos y que el objetivo parezca ser que los estudiantes prediquen, la modelación en la actividad no se reduce a un ejercicio de ajuste de curvas. En lugar de limitarse al paradigma empírico (Maull y Berry, 2001), la actividad hace entrar los estudiantes en el paradigma teórico, ya que ellos deben analizar la situación y recurrir a conceptos y propiedades conocidos para construir su modelo, entender la situación y explicar sus resultados.

En la fase de matematización, la construcción del modelo se apoya en el andamiaje ofrecido por la hoja de trabajo. Esto no es sólo para evitar que los estudiantes se pierdan en la cantidad de variables y ecuaciones, sino también para que aprendan cómo las relaciones simples pueden ser combinadas para construir un modelo bastante elaborado, una habilidad necesaria para modelizar, dentro del paradigma teórico, una situación compleja y obtener una comprensión más profunda de las interacciones en juego.

A pesar de que la actividad no tenga la apertura típicamente asociada con una tarea de modelación, ofrece un compromiso interesante para trabajar dentro de un tiempo razonable aspectos de modelación con una tarea orientada a conceptos.

Variantes y extensiones posibles

Esta actividad puede fácilmente hacerse al secundario no recurriendo al cálculo diferencial y limitando la optimización a los registros gráficos y numéricos. Una calculadora gráfica u otro trazador de función es suficiente para completar la tarea.

Por el contrario, al colegial, podemos también optar por imponer el cálculo la mano de la derivada de la función definida por $y = a\sin(\alpha) + L - \sqrt{a^2 + D^2 - 2aD\cos(\alpha)}$, si las técnicas de derivación ya han sido estudiadas. Tal enfoque gana en pertinencia si se junta a la actividad un aspecto de física con los diagramas de fuerzas y los vectores. En efecto, podemos mostrar que el sistema de ecuaciones que describe el sistema físico al equilibrio (con una fuerza resultante ninguna) es equivalente a la ecuación $y'(\alpha) = 0$.

Señalamos que la resolución en la mano de la ecuación $y'(\alpha)=0$ necesita una virtuosidad algébrica que podría justificar pasaje a la calculadora gráfica o un método numérico (por ejemplo, Método de Newton-Raphson).

Finalmente mencionemos que para permitir la aprovechada de la actividad en caso de que el acceso a suficiente montajes se revela prohibitivo, desarrollamos sobre GeoGebra una versión virtual y depurada por la situación, donde interviene sólo la geometría del problema. Liberado por la fuerza gravitacional, este montaje virtual (Figura 10) permite más fácilmente estudiar las relaciones del sistema en estados otras que el al equilibrio. Puesto a prueba con profesores de matemáticas a los niveles secundarios y universitarios, el entorno se reveló un sustituto aceptable, sobre todo si es completado por un montaje físico en la clase.

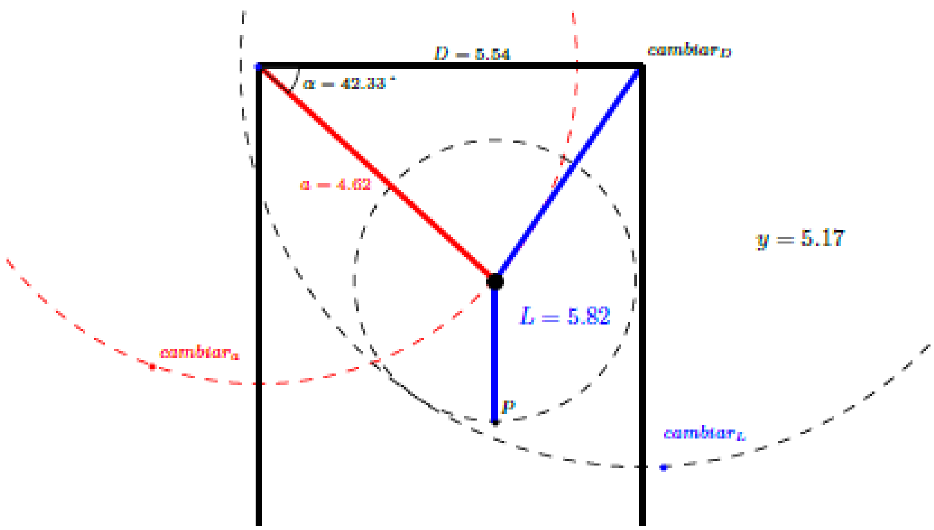


Figura 10 – Una versión virtual du montaje

Conclusión

Aunque la actividad no tenga la apertura típicamente asociada con una tarea de modelación, su experimentación confirmó nuestra intuición que la experiencia nueva de elaborar un modelo matemático complejo, combinando relaciones más simples y el movimiento constante entre una situación y su modelo, establece fundaciones importantes para desarrollar habilidades de modelación. La posibilidad de conseguir esto mientras se desarrolla la competencia con conceptos matemáticos particulares ofrece un camino más practicable para introducir elementos de modelación en cursos donde no se puede considerar el uso de situaciones abiertas. Colaborar con los docentes en el diseño de actividades y reconocer el valor de lo que se puede conseguir dentro de los límites de un curso real ayudan en fortalecer el vínculo entre la investigación y la práctica en la educación de matemáticas.

Referencias

Caron, F. & Pineau, K. (2013). Le poids de l'Hospital : trigonométrie et optimisation en action. Bulletin AMQ, 53 (3), 47-57.

Caron, F. & Savard, G. (2012). Une expérience avec l'exponentielle. Bulletin AMQ, 52 (3), 24-41.

Drijvers, P. (1999). Students encountering obstacles using CAS : A developmental-research pilot study. Computer algebra in mathematics education – invited workshop. Israel: Weizmann Institute.

Galbraith, P. (2007). Beyond the low hanging fruit. In W. Blum, P. Galbraith, M. Niss, & H-W Henn (Eds.), Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI Study (pp. 79-88). New York: Springer.

Lingefjärd, T. (2007). Mathematical modelling in teacher education – Necessity or unnecessarily. In W. Blum, P.L. Galbraith, H.W. Henn, M. Niss (Eds.) *Modelling and applications in mathematics education: 14th ICMI study* (pp. 333-340). New York: Springer,

Maull, W., & Berry, J. (2001). An investigation of student working styles in a mathematical modelling activity. *Teaching Mathematics and its Applications*, 20 (2), 78-88.

Ng, K.E.D. (2013). Teacher readiness in mathematical modelling: Are there differences between pre-service and in-service teachers? In G. A. Stillman, G. Kaiser, W. Blum & J. P. Brown (Eds.) *Teaching mathematical modelling: Connecting to research and practice* (pp. 339-348). Dordrecht: Springer.