Extracto de la tesis:

Carrasco, E. (2006). Visualizando lo que varía. Interpretación y construcción de gráficas de variación en el tiempo. Tesis de maestría no publicada. Tesis de maestría no publicada. CICATA-IPN, México. [Extracto 12-22].

INTRODUCCIÓN

Este estudio indaga obstáculos que presentan los estudiantes para trabajar con gráficas distancia tiempo. Gráficas que están en la base del trabajo con fenómenos de variación los cuales han de estudiarse desde una perspectiva dinámica, que responda a los nuevos desafíos de la ciencia y en especial de la matemática, dejando atrás la "concepción estática de la naturaleza" (Ilya Prigogine[1], 1994; citado en Díaz, 1995) y avanzando en el manejo de fenómenos variacionales en los cuales "ya no podemos seguir hablando únicamente de "leyes universales extrahistóricas" sino que además debemos añadir "lo temporal y lo local" (Ilya Prigogine, 1994) con el fin de comprender y controlar, mediante el manejo de condiciones iniciales, el futuro.

Las dificultades que han mostrado nuestros alumnos a la hora de reconocer cómo y qué varía, con el fin de dar descripciones sobre el devenir de las variables involucradas en la situación, se erige como un obstáculo en su aprendizaje matemático, en particular la confusión en la interpretación y construcción de gráficas distancia-tiempo, con gráficas de la trayectoria del móvil, dan cuenta de una lectura de un gráfico distancia-distancia. Lecturas coherentes con epistemes de trabajo que conciben el tiempo acoplado al movimiento, sin hacer la necesaria distinción entre la variables métrica t y las otras variables presentes, así como el no reconocer la covariación entre ellas.

La visualización de una gráfica involucra interpretación y traducción de las relaciones del gráfico en las situaciones y viceversa. Lo anterior implica compartir, por parte de la comunidad que usa esta herramienta, significados sobre los elementos que constituyen el gráfico. Por tanto la indagación en los obstáculos para el trabajo con gráficas distancia-tiempo se focaliza en las significaciones y representaciones que nuestros estudiantes comparten o no con la comunidad matemática que institucionalizó las gráficas distancia-tiempo.

---

[1] Premio Nóbel de Química, en conferencia en el encuentro interdisciplinario Internacional de Nuevos paradigmas, Cultura y Sociedad, Organizado por INTERFAS. Buenos Aires Argentina.

Un tiempo que fue constantificado en el desafío de buscar la evolución del sistema en estudio y por tanto de la necesaria centración en la manera de variar. En este proceso el tiempo se considera isotropito, independiente de los fenómenos, consideraciones que el siglo XX comenzó a redefinir. La teoría de relatividad, obliga a "cambiar nuestras ideas de espacio y tiempo, debemos aceptar que el tiempo no está completamente separado e independiente de espacio, pero que se combina con él para formar un objeto llamado el espacio-tiempo" (Hawkins, 1960), más aún la mecánica cuántica con su principio de incertidumbre y la imposibilidad de un observador externo a la situación -si iluminamos una partícula para ver su velocidad, la dotamos de energía y por tanto esta se acelera- junto a los procesos caóticos han ido mostrando la necesidad de un nuevo paradigma que atienda a las nuevas complejidades e interrelaciones de variables que hoy se constatan y que una mirada reduccionista no logra modelar adecuadamente.

Al centro de este cambio epocal ha estado el tiempo. Un tiempo que en la práctica matemática se ha metrizado, concebido como reversible en un proceso de "reducción de la naturaleza a las leyes deterministas y temporalmente reversibles constituyendo la eliminación de la flecha del tiempo. Flecha del tiempo que hoy se visualiza necesaria, a la luz de las necesidad nuestra de vivir con el pasado y el futuro. Como señala Prigonine 1995 *"en la mayoría de los fenómenos que examinemos, especialmente en el nivel macroscópico (ya sean parte de la química o la biología) el pasado y el futuro juegan un papel diferente. En torno de nosotros hay por doquier una flecha del tiempo"* Flecha del tiempo que no esta presente en el trabajo de la matemática y la física, por tanto la pregunta que se hace Prigonine *¿Cómo puede emerger esta flecha del tiempo de un no tiempo?"* y en particular, ¿como un estudiante puede representarse un tiempo métrico desde una representación sin tiempo?.

CAPITULO I: El problema

Antecedentes

Miguel de Guzmán refiere una anécdota de Norbert Wiener quien "*se encontraba ante su clase del MIT (Massachussets Institute of Tecnology) en medio del desarrollo de una complicada demostración. La pizarra estaba llena a rebosar de intrincadas fórmulas. De pronto se atascó, se quedó mirando fijamente la última fórmula y pareció convertirse en estatua por un buen rato. Todos pensaban, conteniendo el aliento, que estaba en un callejón sin salida. Pero Wiener, sin decir una sola palabra se dirigió al rincón de la pizarra, donde había todavía un pequeño espacio libre, trazó unas pocas figuras que nadie pudo ver pues estaban ocultas por su propia espalda. De pronto se le iluminó su rostro. Sin decir una sola palabra borró sus figuras misteriosas y volvió al punto en que se había atascado para continuar ya, impecablemente y sin problema alguno".*

La importancia de la visualización matemática, entendida como la imagen mental que nos formamos sobre las ideas matemáticas y que involucra íconos, dibujos, gráficas entre otros, se ha constituido en una herramienta de construcción de ideas matemáticas, pero no como una herramienta de la matemática formal. A partir de Euclides, se impuso el deber de la matemática de ser deductiva, de ir desde una verdad a otra, y en este fluir de verdad desde las premisas básicas – axiomas, postulados- las imágenes, diagramas y dibujos han sido desestimados como herramientas principalmente por la desconfianza que se atribuye a los sentidos como medios para observar la realidad. Dieudonné[2] llega al extremo de declarar en la introducción de su obra sobre Álgebra lineal y geometría: "Me he permitido también no introducir ninguna figura en el texto,..."; "Es deseable liberar al alumno cuanto antes de la camisa de fuerza de las "figuras " tradicionales hablando lo menos posible de ellas (exceptuando, naturalmente, punto, recta y plano)".

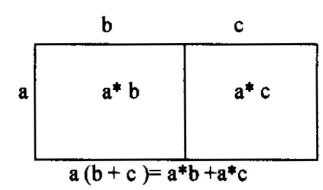


Fig. 1

---

[2] Introducción de la obra de Jean Dieudonné sobre álgebra lineal y Geometría. Sacado de *El Rincón de la Pizarra*, Miguel de Guzmán (Pirámide, Madrid, 1996) en http://usuarios.bitmailer.com/edeguzman/Visualizacion/01quees.htm

Sin embargo, las imágenes han sido parte fundamental en la actividad matemática. Como no mencionar la *Aritmética Geométrica* de Euclides, que hoy se retoma en la práctica de aula (ver Fig.1),

Particularmente "*El cálculo del siglo XVII nace con una componente fundamentalmente visual y así se mantuvo en su desarrollo en los siglos siguientes, en interacción constante con los problemas geométricos*" (Miguel de Guzmán, op.cit.). Oresme (1320) introduce la primera pregunta ¿Cómo dibujar lo que varia?, comenzando un proceso de construcción de herramientas de visualización de variaciones. Descartes (1600) y la geometría analítica dan importantes pasos para visualizar variaciones como secciones de curvas geométricas y finalmente Newton (1642) construye el cálculo a partir de estrategias geométricas sobre curvas que son "trazadas" por un "punto que se desplaza" (Lakoff y Nuñez). Más aún, Gauss en el siglo XIX, reconoce que "La matemática es la ciencia del ojo", y a principios de siglo Hilbert destaca que "las figuras geométricas son fórmulas gráficas y ningún matemático puede prescindir de ellas".

En resumen, las herramientas visuales son parte del hacer matemático y han sido fundamentales en el desarrollo del pensamiento matemático y en especial del pensamiento variacional. Si bien las críticas hacia esta herramienta, que aducen su falibilidad a la hora de asegurar la verdad, no consideran que la actividad matemática involucre el trabajo en diversos registros, como el algebraico, geométrico, tabular entre otros. Es a través de esta articulación y el reconocimiento de las diversas posibilidades que ofrece cada uno de ellos en cuanto a las posibilidades de construir saber, argumentar y justificar que la visualización mediante el uso de graficas e iconografías han mostrado ser muy fértiles a la hora de construir saber y resolver problemas, pues, como señalara Pascal, "*La razón nos hace dar pasos seguros, pero es el corazón quien nos permite dar saltos*".

El avance de las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (Tic's) entre otras razones, ha vuelto a focalizar el interés de investigadores en la visualización matemática, reconociéndola como una importante herramienta del pensamiento. Al respecto, Miguel de Guzmán (1996) señala que "*una consideración de lo visual como argumento heurístico, ayuda en el trabajo informal, guía de inspiración,... se trata de avanzar hacia una concepción más seria de los valores probativos y demostrativos de los procesos de la visualización*"[3]. Proceso que abarca más que la simple imagen de un objeto, sino que se refiere a la construcción mental que hace un individuo sobre una teoría, situación o problema que se desee enfrentar. Hitt (1998) señalaba que "*la visualización matemática requiere de la habilidad para convertir un problema de un sistema semiótico de representación a otro*" y que "*investigaciones recientes sobre los sistemas semióticos de representación han puesto de manifiesto la importancia de la articulación entre diferentes representaciones de conceptos matemáticos para el aprendizaje de la matemática*". Y en esta área las gráficas son un elemento privilegiado para la actividad matemática profesional, lo que ha generado y validado a las gráficas en el hacer matemático, junto con restricciones y acuerdos diferenciándolas de los iconos o dibujos, aún cuando el valor de verdad de una conclusión o propiedad sigue fuertemente radicado en los dominios de la lógica. Con mayor rigor podemos decir que la visualización considera las relaciones y los cambios que la persona puede realizar en su mente para la búsqueda de los modelos e invarianzas presentes en una determinada situación. Más aún, Cantoral y Montiel señalan que la "*visualización Matemática trata con el funcionamiento de las estructuras cognitivas que se emplean para resolver un problema, con las relaciones abstractas que formulamos entre las diferentes presentaciones de un objeto matemático a fin de operar con ellas y obtener un resultado y sobre todo, de la participación de una cultura particular al compartir símbolos y gráficas*" (2001)

Particularmente, Cantoral y Farfán (1998) señalan que para acceder al pensamiento y lenguaje variacional se precisa entre otras cosas del manejo de un universo de formas gráficas extenso y rico en significados por parte del que aprende. Por lo se ha de asumir que: previo al estudio del cálculo se precisa de la adquisición de un lenguaje gráfico que posibilite, esencialmente, la transferencia de campos conceptuales virtualmente ajenos a causa de las enseñanzas

[3] Pagina web

tradicionales, estableciendo un isomorfismo operativo entre el álgebra básica y el estudio de curvas, mejor aún, entre el lenguaje algebraico y el lenguaje gráfico (Cantoral, Farfán y otros, 2000, pág. 191), permitiendo de este modo una articulación entre diversos registros de representación, articulación no sencilla ni fácil de lograr, Vinner (citado en Hitt 1998) reporta que sus alumnos (de nivel universitario) tuvieron una tendencia a la evasión de consideraciones visuales aún después de un curso de cálculo con énfasis en representaciones gráficas y demostraciones visuales. Más aún las respuestas correctas dadas por ellos evidencian que no lo hicieron correctamente "*mostrando la necesidad de promover con mayor profundidad la articulación de representaciones en apoyo a la resolución de problemas*" (Hitt 2000). En ese mismo artículo Hitt señala que no basta con recurrir a las representaciones geométricas y gráficas para resolver un problema, es necesario la articulación libre de contradicciones entre las diferentes representaciones semióticas utilizadas en la resolución del mismo.

Más aún, Cordero (2001) señala la importancia de trabajar con situaciones de transformación4, específicamente en argumentos sobre el comportamiento tendencial de las funciones en que "la modelización de la transformación de funciones (y=f(x)→ Y = Af(Bx+X)+D) lleva a la construcción de significados (comportamientos gráficos y patrones algebraícos y gráficos), haciendo procedimientos (variación de coeficientes) construyendo procesos y objetos (concibiendo la función como una instrucción que organiza comportamientos)". Esta aproximación a los fenómenos de variación, sobre la base del comportamiento tendencial de las funciones está en la articulación de propiedades locales y globales en las cuales hay variación y comportamiento con cierta tendencia.

Desde una perspectiva psicológica cognoscitiva (Janvier, 1987), el manejo e interpretación de gráficas, es un proceso de traducción desde un gráfico en otro gráfico o una situación (la descripción verbal) en otra situación (descripción

[4] Cordero 2001, Distingue tres posibles construcciones del Calculo, y que cada una de estas genera argumentos que permiten construir nuevo conocimiento. Una primera construcción en base a situaciones de aproximación, en que por ejemplo se pide a la clase, hallar la ecuación de la recta tangente en el punto P de la curva y=f(x). Una segunda en base a situaciones de Variación, en que se pide, por ejemplo, a la clase "sea $f(x_0)$ y $f'(x_0)$ condiciones iniciales de cierta posición de un móvil. Predecir por tanto la siguiente posición $f(x_0+h)$". y Finalmente una tercera en base a situaciones de transformación, en que a la clase se le pregunta por ejemplo, Determine el valor de coeficientes A, B, C y D para que la curva Y=f(x) se parezca a la recta L en un intervalo I_0.

verbal), llamado esto transposiciones (op. cit., 1987) y conformando una estructura conceptual que permite la traducción. Estructura que es relativa a mundos particulares de vida (Wolff-Michael Roth) y por tanto la actividad de leer gráficos, que ha sido tradicionalmente enmarcada como "interpretación", es ahora entendida como la "acción por la cual un estudiante construye sentidos o levanta significados desde un gráfico (o porción de un gráfico)" (Leinhardt et al., 1990, pág. 8). Por su parte, desde la fenomenología y perspectivas semióticas, se destaca que toda lectura involucra interpretación y traducción de las relaciones del gráfico en las situaciones y viceversa, implicando, por tanto, el conocimiento de símbolos y contextos que sean compartidos por los estudiantes que leen el gráfico y por el constructor, en este sentido, "*al ser las gráficas otras formas de signos, tienen relaciones arbitrarias pero convencionales para las cosas que representan y que no pueden ser elaboradas sin conocer esas convenciones" (Preece & Janvier, 1992)*, más aún, *"las gráficas contienen pequeñas unidades de información circunstancial, y luego construir una descripción de una situación desde un gráfico puede se una tarea inherentemente indeterminada a partir de la información que solo esta disponible en la gráfica*"[5].

Leinhardt (1990), muestra "*como la confusión de "la inclinación" / "la altura", se levanta cuando los estudiantes les preguntan sobre la rapidez relativa de dos objetos en el contexto de un gráfico que muestra la distancia-tiempo. En lugar de identificar la velocidad relativa (desde la inclinación de la curva) muchos estudiantes comparan las alturas relativas de ambas curvas (a menudo líneas) presentadas. Junto a ello destaca como la interpretación icónica incluye todos esos errores cuando los estudiantes inapropiadamente relacionan rasgos topológicos en la situación (por ejemplo, una curva la conceptualizan como la huella de una traza) y en rasgos topológicos similares en la representación correspondiente (por ejemplo una curvatura en el gráfico de una línea)"*. Incluso en un estudio experto-experto (Roth & Bowen, 2003), se documenta como un grupo de expertos en el lugar de trabajo presentan importantes dificultades para interpretar gráficos encontrados en los cursos de pregrado y en libros de texto

[5] Emergence of Graphing Practices in Scientific Research Wolff-Michael Roth *University of Victoria*

usados en la formación de su área, es decir, no distinguen entre los gráficos y los fenómenos que para ellos se han vuelto transparentes (Roth, 2003a; Williams, Despiértese & Boreham, 2001), mostrando las dificultades de interpretación de gráficas cuando no se esta familiarizado con ellas.

Específicamente Dolores y otros (2002) muestran las siguientes concepciones alternativas en estudiantes y profesores sobre los elementos que componen las gráficas distancia tiempo. Cabe destacar, la representación

a) de velocidad media con la magnitud de la ordenada o con el intervalo de mayor longitud. No encontró en su estudio a estudiantes y maestros que en caso de gráficas horizontales, reconocieran la velocidad como 0 d/t
b) De la Velocidad Inicial, se reconoce como aquella que comienza en el tiempo 0 pero cuya ordenada es mayor,
c) Respecto de la velocidad negativa, la mayoría la reconoce como aquellas gráficas cuya ordenada en negativa
d) Y la gran mayoría asocia la gráfica con la trayectoria del móvil (Fig. 2)
e) Reconoce la altura de la coordenada "y", como la inclinación de la curva
f) Asocia el signo de f(x) al concepto de función creciente o decreciente.

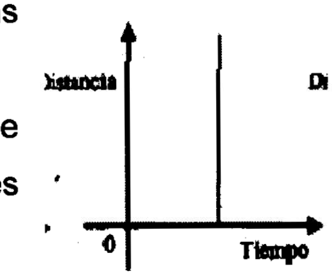
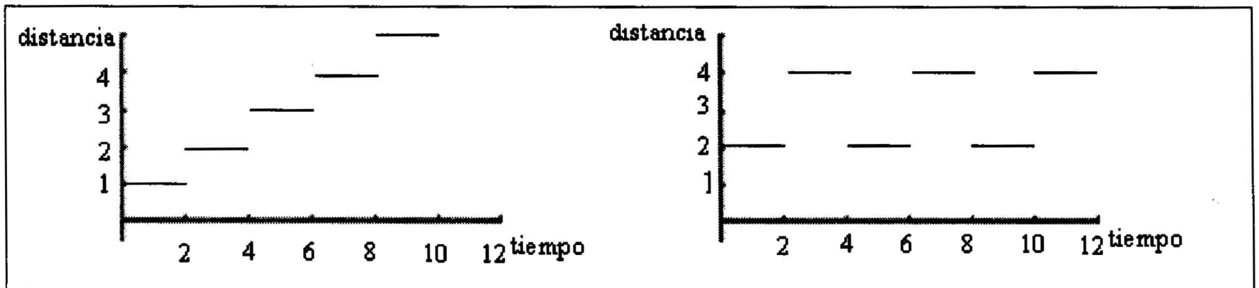


Fig. 2

En particular, en practicas de aula, estudiantes de primer año de pedagogía en matemática -que ya habían cursado un primer curso de cálculo- se les pidió que señalaran que fenómeno podía describir un censor que generaba las graficas de la Fig. 3 - usadas por Buendía y Cordero (2002)-, sus respuestas evidenciaron la asociación de la gráfica con la trayectoria del móvil, una especie de persistencia de la imagen[6] de un fenómeno por sobre la comprensión de los elementos que variaban, en especial, el transcurso del tiempo. Los estudiantes identificaron el gráfico de la izquierda como la trayectoria de una persona subiendo las escaleras (más bien la escalera), mientras que el gráfico de la derecha los asocian con la traza que dejan marcas de un patinador mirado desde arriba, dando cuenta de un

[6] Imagen que podríamos llamar *fotográfica* del fenómeno.



Interpretación estudiante 1:	Interpretación Estudiante 2:
"Subir una escalera"	"Marcas de un patinador al avanzar"

Fig. 3

desplazamiento distancia/distancia, pese a estar escrita en el eje de las abscisas la dimensión de tiempo, mostrando un tiempo que no es desacoplado desde el movimiento.

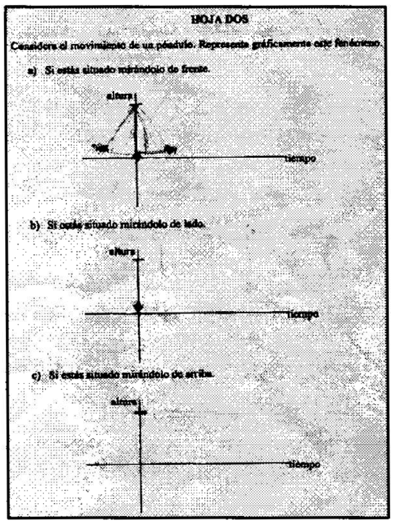


Fig. 4

Esta dificultad se documenta en Ávila y Carrasco, (2002). A estudiantes de segundo semestre de la carrera de pedagogía, se les pide que a partir del movimiento de un péndulo, explicitar la imagen del fenómeno elegido, dibujando la situación desde tres puntos de vista distintos: Mirada frontal, lateral y superior, con el fin de recabar evidencias del efecto que produce la persistencia de la imagen en la construcción de la gráfica. Posteriormente se les solicitó construir la gráfica altura/tiempo desde los mismos puntos de vista, para explorar si los estudiantes lograban representar el fenómeno cuya gráfica debería ser la misma, independiente del punto de vista del observador, a diferencia de las graficas distancia /distancia. Los resultados no variaron del mostrado en la Fig. 4. A partir de ello, se puede conjeturar que primó - a la hora de graficar - la imagen espacial que se tenía del fenómeno, dejando un tiempo implícito en el movimiento, mostrando la dificultad asociar una gráfica pertinente a un fenómeno cuando se requiere trabajar con variables que no están explicitas a la vista como lo es el tiempo. Es decir el tiempo pareciera ser desplazado por las distancias visibles.

Por su parte Arrieta (2004) obtuvo las siguientes representaciones gráficas estudiantiles del desplazamiento de un profesor por la sala

En la Fig. 4a el tiempo marca solamente las detenciones del profesor, en una representación sin ejes, en la cual el tiempo esta sobrepuesto a la representación

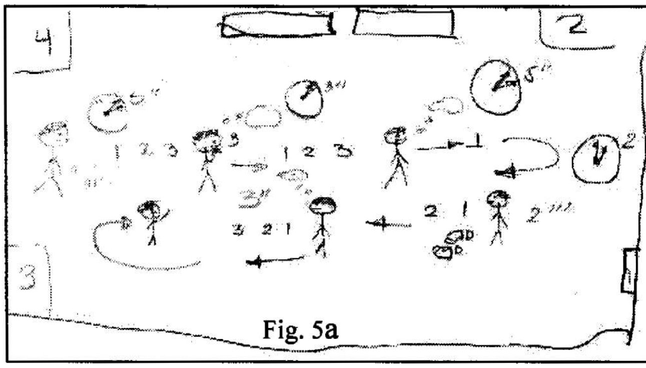


Fig. 5a

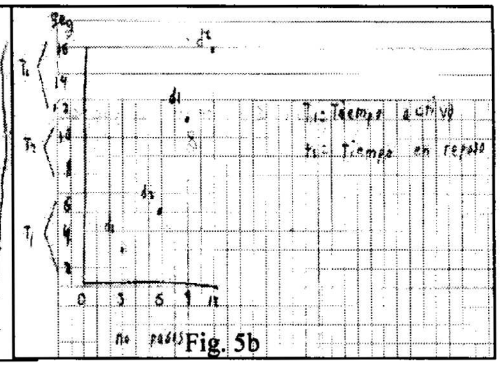


Fig. 5b

espacial de las detenciones. Por su parte, la figura 4b, más avanzada en la situación didáctica trabajada por Arrieta, Se presentan un eje para el tiempo y otro para el número e pasos dados- no para la distancia recorrida, El tiempo nuevamente no es usado de modo único, sino que establecen dos mediciones paralelas para dos fe3nomenos diferentes: un tiempo T1 para los medir la duración de los desplazamientos y un tiempo T2 para medir la duración de los momentos de detención.

Ambas gráficas evidencian un tiempo que marca eventos particulares - detenciones del profesor, avances del profesor, intervalos de avance, y que no es incorporado como variable continua que co-varia con las demás y por tanto factible de ser abscisa en un gráfico.

Arrieta documenta las dificultades que presentan los estudiantes:

- *"Confunden la gráfica de la trayectoria del móvil con la gráfica distancia - tiempo. Una línea recta con pendiente no cero, en algunos casos, es interpretada como un objeto moviéndose con algún ángulo.*
- *No asocian una gráfica horizontal con un objeto estacionario.*
- *No interpretan que cuando la posición de la gráfica retoma al eje horizontal, el objeto retoma al origen físico.*

- *Confunden el origen físico con el origen de la gráfica distancia – tiempo.*

Parece subyacer en este conjunto de antecedentes, en la interpretación y construcción de gráficas de fenómenos de variación en el tiempo con ejes de dimensiones espaciales por parte de los estudiantes, y donde el tiempo, o los tiempos, van implícitos en el "punto" que traza la gráfica en las diversas situaciones. Conjeturamos que estas interpretaciones levantadas por los estudiantes pueden responder a partir de las siguientes representaciones:

a) Avanzar una distancia es un número positivo y retroceder es un número negativo
b) La curva ha sido pintada por el móvil que se mueve
c) El tiempo va superpuesto al movimiento, y no es representado como variable separada del movimiento

Por tanto el tiempo, como la variable del eje de las abscisas, es invisibilizado en las representaciones, y es reemplazado por dimensión espacial.