LA MODELACIÓN MATEMÁTICA EN SITUACIONES PROBLEMA DE LA VIDA COIDIANA

Rafael Pantoja Rangel, María de Lourdes Guerrero Magaña, Ricardo Ulloa Azpeitia, Sandra Minerva Valdivia Bautista

Departamento de Matemáticas, CUCEI. Universidad de Guadalajara

rpantoja@prodigy.net.mx, lourdes.guerrero@gmail.com, ricardo.ulloa@cucei.udg.mx, sandy_87siel@hotmail.com

Palabras clave. Modelación matemática, Situación problema, Trabajo Colaborativo, Tracker, Representaciones semióticas.

Resumen

El estudio se centra sobre los elementos que intervienen en la modelación matemática, en el afán de incidir sobre la relación existente, que se pretende sea una realidad, entre las matemáticas y la vida cotidiana, contexto en el que desarrollan sus actividades, y no sólo en el aula, los actores de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Algunas de las situaciones problema tratadas son: el atletismo, el lanzamiento de un balón, el tiempo de calentamiento de un automovil o de un horno, el llenado y vaciado de recipientes, el ciclismo, el movimiento de una rueda que gira sobre su eje o que rueda sin resbalar, un resorte o un péndulo, el movimiento de un automovil real y de juguete, el movimiento de una motocicleta. El video grabado por los estudiantes fue tratado con el software Tracker y analizado con la finalidad de relacionar los acercamientos verbal, gráfico, analítico y numérico con la situación problema elegida por cada grupo colaborativo. De la observación del desarrollo de la fase experimental dentro y fuera del aula, de la encuesta aplicada, de la discusión generada por las presentaciones se concluye que esta forma de trabajo genera conocimiento, interés por aprender matemáticas individual y colaborativamente, propicia valores como la puntualidad, honestidad, responsabilidad y respeto, entre otros, que son tan necesarios en la sociedad actual.

Introducción

Las matemáticas se han utilizado en la vida desde que el ser humano existe, las distintas civilizaciones a través del tiempo han dejado un cúmulo de conocimientos matemáticos de diferentes características y en distintos contextos, cada uno de ellos, de acuerdo a las necesidades que prevalecían en los diferentes momentos de la historia, tuvieron como objetivo dar respuestas a todo fenómeno, ya sea del área de física, química, astronomía, música, astrología, arte o religión, pero tal parece que en cierto momento, el profesor de matemáticas se ha olvidado de relacionar tales problemas de la vida cotidiana con la matemática planteada en el aula, que de acuerdo a Arrieta, Carbajal, Díaz, Galicia, Landa, Mancilla, Medina y Miranda (2007) y Suárez (2014), hacen más interesante su enseñanza y aprendizaje.

En el aula se enseña una matemática algorítmica, sin relación con el contexto del profesor o del estudiante, en ocasiones totalmente fuera de lugar y sin una función específica dentro de las aplicaciones de alguna área del conocimiento, sólo dentro de la matemática misma. Por ejemplo, en un ejercicio de integración de un curso de Cálculo se pide calcular la integral

$\int_0^1 \sqrt{1+x}dx$. Para ello se realiza el cambio de variable t=1+x, dt=dx , se calculan los nuevos límites de integración, si x=0 $\Rightarrow$ t=1 y x=1 $\Rightarrow$ t=2 y se procede a calcular la integral $\int_0^1 \sqrt{1+x}dx = \frac{2}{3}\left(\sqrt{8}-1\right)$. Otra opción para resolver la integral es utilizar un software que arroja el resultado de inmediato: $\int_0^1 \sqrt{1+x}dx = 1.21895142$.

En otro contexto, se pide calcular la longitud de arco de la función $f(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ de x=0 a x=1, para lo cual se sustituye la primera derivada, $\frac{dy}{dx} = x^{\frac{1}{2}}$ en la fórmula para calcular la longitud de arco y llegar a la misma integral.

Otro acercamiento es que se proporcione la gráfica (Ver Figura 1) y se pida calcular la longitud de arco desde el punto (0, 0) al punto (1, 2/3). En este caso, el problema sale del contexto de la enseñanza tradicional, porque al estudiante sólo se le proporciona la gráfica y no la expresión analítica para aplicar la fórmula para calcular la longitud de arco.

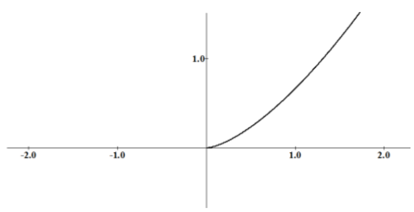


Figura 1. Gráfica de la función

Son varios los planteamientos para el mismo ejercicio que el profesor puede emplear para su enseñanza en el aula, pero en este caso, no existe relación entre la matemática y su entorno, lo que inquieta e incita al alumno a cuestionar a los profesores sobre ¿para qué me sirven las matemáticas?, ¿en qué situaciones de la vida cotidiana son útiles? Este tipo de interrogantes se derivan de que la enseñanza tradicional está muy arraigada en las instituciones educativas, desvinculada de su contexto y se centra en observar el desarrollo de un ejercicio en el pizarrón, para posteriormente aplicarlo en condiciones semejantes, como una imitación del trabajo del profesor.

En este estudio se plantea como estrategia didáctica que a partir del desarrollo de actividades con diversas situaciones problema (Hitt, 2007, 2013) relacionadas con su contexto y apoyadas en la teoría de representaciones semióticas, la visualización, la resolución de problemas, el trabajo colaborativo y el software Tracker, el alumno construya la competencia de modelación matemática. El Tracker juega un papel preponderante en la estrategia porque a partir de la grabación en video de una situación problema, el estudiante interpreta y relaciona los datos, los gráficos y las funciones que proporciona el software con el desarrollo de la actividad, en la que se evidencia la acción de modelar (Ezquerra, Iturrioz y Díaz, 2011; Pantoja, Ulloa y Nesterova, 2013).

Se coincide con Cordero (2004) y Cordero y Suárez (2005), en que es importante para el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, que se integren a la práctica escolar circunstancias, fenómenos, sucesos, etc., que propicien la aparición de las matemáticas en la vida del estudiante, en contextos diferentes a los tratados en las aulas tradicionales (Hitt y Cortés, 2009; Arrieta, Carbajal, Díaz, Galicia, Landa, Mancilla, Medina y Miranda, 2007; Ezquerra, s/f, 2005, 2010;), como son el atletismo, el lanzamiento de un balón, el tiempo de calentamiento de un automovil o de un horno, el llenado y vaciado de recipientes, el ciclismo, el movimiento de una rueda que gira sobre su eje o que rueda sin resbalar, un resorte o un péndulo, el movimiento de un automovil real y de juguete, el movimiento de una motocicleta o las fotos de un chorro de agua de una fuente, de un arco de la iglesia y del arcoíris en un día con lluvia y sol.

Con el desarrollo de las situaciones problema mencionadas, en las que el estudiante es el protagonista principal, se pretende que obtenga datos y gráficas en tiempo real, adquiridos del programa Tracker a partir del video, para su análisis e interpretación y no como sucede en el aula, por ejemplo, que son un conjunto de datos extraídos de los libros de texto o ficticios inventados por el profesor.

Del análisis de los videos grabados, de la encuesta, la entrevista, la exposición y los reportes se afirma que la modelación matemática propicia un efecto positivo en los estudiantes por el aprendizaje de las matemáticas y su articulación con situaciones problema del entorno de la vida cotidiana, porque no solo lograron ajustar los polinomios, sino que fueron capaces de relacionar e interpretar los gráficas y los datos con el movimiento en tiempo real de los objetos. En el aspecto cualitativo mostraron interés y motivación por esta nueva forma de aprender matemáticas, fueron puntuales, respetuosos y participativos.

La Modelación Matemática en el ámbito escolar

Se ha mencionado que existe una gran preocupación por parte de investigadores en educación matemática, para que el alumno aprenda de manera significativa y una de las recomendaciones para lograrlo, es generar actividades didácticas que relacionen el contexto en el que desarrolla su vida cotidiana con las matemáticas, con la finalidad de promover en el estudiante el descubrimiento, la exploración, la intuición y la motivación por aprender matemáticas.

En los últimos años, las estrategias que se utilizan para aprender matemáticas a partir de situaciones problema del mundo real (Blum, 2004), han tomado fuerza debido a que facilitan la interpretación de la realidad a partir de la detección de las variables participantes y de la recolección de datos que se generan para modelar tales situaciones, es decir, relacionar la vida cotidiana con la matemática.

La modelación matemática es una de las opciones de que dispone el profesor para provocar en el estudiante motivación por aprender matemáticas, porque además de construir el modelo matemático de una situación problema, propicia reflexión sobre el comportamiento de las variables que intervienen y su vínculo con el fenómeno.

De manera particular, la modelación de una situación problema es una representación matemática de un objeto, que comprende signos o figuras que actúan como expresiones matemáticas del concepto. La modelación (Ver Figura 2), en el ámbito escolar se entiende como una práctica (de referencia) ejercida por profesores y estudiantes en un contexto y tiempo determinado en respuesta a una situación o fenómeno del mundo externo pero cercano a la realidad del estudiante, de manera individual y colectiva, mediante el proceso de interacción (Córdoba, 2011, p. 10).

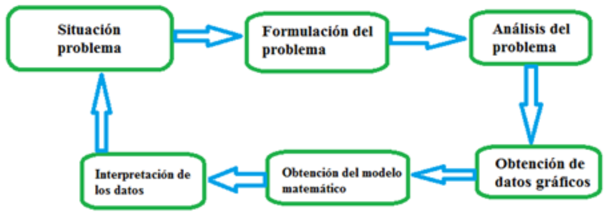


Figura 2. Esquema del proceso de modelación matemática.

Según Blomhoj (2009) las actividades de modelación posibilitan el proceso de aprendizaje y permiten establecer raíces cognitivas sobre las cuales se construyen conceptos matemáticos. De ésta forma, la modelación matemática tiene como propósito describir y analizar situaciones de la vida diaria, con el fin de motivar el aprendizaje de las matemáticas.

Para Freundental (1981, *p. 140*) la secuencia ideal para enseñar es lo contrario a lo que usualmente sucede en las aulas de matemáticas, esto es, se dedica mucho tiempo a realizar cálculos basados en la repetición de ejercicios, pero muy poco o nulo es el tiempo dedicado a la realización de prácticas con problemas en contextos reales. De aquí la importancia de retomar el sentido planteado por Freundental sobre el uso de la modelación matemática, pues sin duda, lo más trascendental es que el empleo de situaciones reales motiva a los estudiantes a aprender matemáticas, ya que muestran interés durante el proceso, además, facilita la retención de todo lo que sea posible construir y que tenga sentido en su contexto, y la convivencia colaborativa en la que se propicia el intercambio de ideas, la participación, el respeto, la honestidad y la puntualidad, entre otros valores, tan necesarios en la sociedad mexicana actual.

Validación de los datos reales y los de Tracker

El estudio de la trayectoria de la bala disparada por un cañón, actualmente se clasifica como un movimiento parabólico, pero en el siglo XVI, se pensaba que el movimiento del proyectil se integraba de tres trayectorias (Ver Figura 3), una rectilínea, una curva y otra rectilínea con dirección al centro de la tierra. (Tartaglia, 1537 citado por Martínez y Guevara, 1998). El proceso llevado a cabo por Tartaglia es un ejemplo claro de que las matemáticas son útiles y aplicables en situaciones prácticas y reales, que permiten hacer conjeturas, predicciones y suposiciones, que más adelante puedan ser empleadas en situaciones nuevas para encontrar respuestas y soluciones a problemas que son de interés para la sociedad, pero que también son fuentes generadoras de errores, involuntarios tal vez, pero considerados como parte de la construcción del conocimiento.

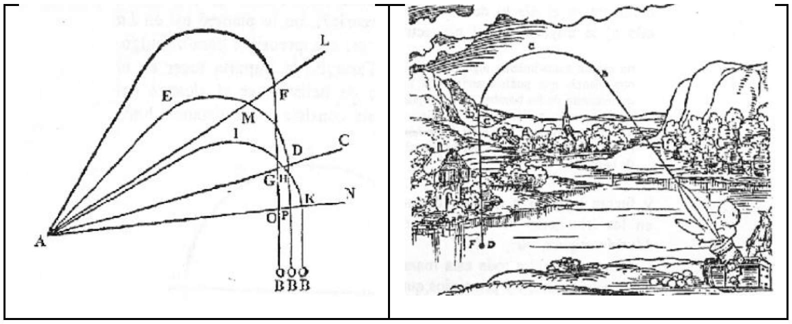


Figura 3. Figuras alusivas al movimiento de proyectiles.

Este tipo de concepciones erróneas para el movimiento de un proyectil, no es casual, es parte de la problemática generada cuando el hombre enfrenta una situación que desconoce, que no sabe cómo argumentar, pero que se considera parte del proceso de aprendizaje, en este caso, la modelación matemática, en otras palabras, es un proceso dialéctico que el estudiante, en su afán por buscar la solución, transita hasta lograr o no, el resultado deseado.

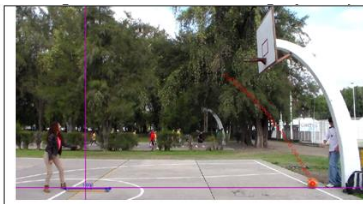
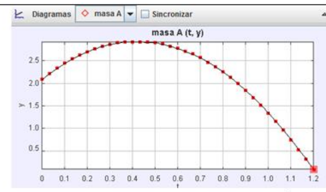
Galileo estudia a profundidad el movimiento de proyectiles y en los *Discorsi* plantea la afirmación: *Un proyectil que se desliza con un movimiento compuesto por un movimiento horizontal y uniforme* (gráfica ***x*** contra ***t***) *y por un movimiento descendente, naturalmente acelerado* (gráfica ***y*** contra ***t***)*, describe, con dicho movimiento, una línea semiparabólica".* G. Galilei (1633, p. 129).

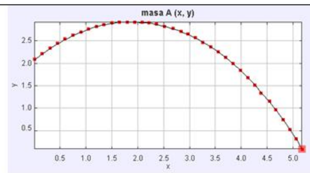
El movimiento del proyectil estudiado por Galileo, en nuestro caso, el lanzamiento de balón al aro del juego de basquetbol, fue analizado con el Tracker y utilizado para validar la información mostrada en la pantalla de la computadora, dado que una de las circunstancias que preocupa a los estudiantes, es sí los datos y gráficas obtenidos del video y mostradas por el software, corresponden a las medidas reales del escenario de filmación.

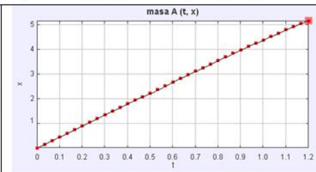
Se dio por hecho, que los alumnos saben que el movimiento consiste en el cambio de posición de un objeto con respecto del tiempo, que es importante ubicar de manera adecuada en el Tracker el sistema de referencia y una unidad de medida, que hará la función de interfase entre la situación problema (real) y el video digital (virtual) manipulado con el software, para que la modelación del lanzamiento de un balón sea un acercamiento no ficticio, diferente al ejercicio que se plantea en un texto de física tradicional (mecánica) para el movimiento de un proyectil, en el que se proponen datos convencionales de algunas de las variables incluidas, mismas que se sustituyen en las ecuaciones de movimiento y cuya solución se determina mediante una manipulación algebraica, sin considerar los acercamientos geométrico o numérico.

En el caso de la propuesta, se ubica al alumno en la cancha de básquetbol y se graba la trayectoria del balón hacia el aro, video digital que se procesa con el Tracker, que "regala" las gráficas en los planos ***t-x***, ***t-y***, ***x-y***, una tabla con datos numéricos de las variables que intervienen y los polinomios del movimiento en los planos respectivos (Ver Tabla 1). Este análisis del tiro parabólico no se contrapone al planteamiento tradicional de los textos de Física, sino que se complementa y enriquece el aprendizaje del estudiante, porque con las TIC se le brinda la oportunidad, desde el acondicionamiento del set de grabación hasta la sesión de discusión grupal, de relacionar el movimiento del proyectil con la interpretación de las gráficas, los datos y las ecuaciones cuadráticas proporcionadas por el Tracker.

Tabla 1. *Imagen del lanzamiento, gráficas y ecuaciones del lanzamiento del balón.*

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">

$y = 2.009 + 3.956t - 4.7t^2$</td><td>(1)</td></tr>
<tr><td>

$y = 2.053 + .9620x - .2586x^2$</td><td>(2)</td><td>

$x = .04452 + 4.342t$</td><td>(3)</td></tr>
</table>

En la Tabla 2 se presentan las ecuaciones del movimiento del tiro parabólico (Resnick, Halliday y Krane, 2008), que se utilizan para obtener los datos restantes del movimiento parabólico, en este caso, la aceleración de la gravedad, el ángulo de tiro y la velocidad inicial, con una comparación entre las ecuaciones (1) y (5), (2) y (10), (3) y (4) término a término y mediante una manipulación algebraica, se determinan, aproximadamente, los valores de la aceleración de la gravedad $g = 9.4\, m/s^2$, la velocidad inicial $v_0 == 5.874\, m/s$ y el ángulo de tiro, $\theta = 42.334^\circ$. Se aclara que el dato arrojado para la aceleración de la gravedad, es cercano al valor $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$, que por las circunstancias del contexto, como son la inexperiencia del profesor y los estudiantes para grabar un video, las condiciones climáticas o el manejo del programa Tracker, se puede considerar que es una buena aproximación, que se aprovechó para que los alumnos discutieran el porqué del error generado.

Tabla 2. *Ecuaciones del movimiento.*

$x = x_0 + v_0 \cos(\theta) t$	(4)	$y = y_0 + v_0 sen(\theta) t - \frac{1}{2} g t^2$	(5)	$v_x = v_0 \cos(\theta)$	(6)	$a_x = 0$	(7)
$v_y = v_0 + v_0 sen(\theta) - gt$	(8)	$a_y = -g$	(9)	$y = y_0 + \tan(\theta) x - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2(\theta)} x^2$	(10)		

Se considera que este tratamiento es una validación de los medios y materiales utilizados, que se requiere valorar, ya que la interface entre la situación real y el video procesado con Tracker, propicia en ocasiones circunstancias que hacen dudar a los actores del proceso sobre la relación existente entre las matemáticas y el mundo real.

Aprendizaje Colaborativo

Los participantes trabajaron en forma colaborativa, discutieron y defendieron sus ideas y fueron capaces de desechar los razonamientos incorrectos o inadecuados, tomaron decisiones, argumentaron por qué están o no de acuerdo con ciertos planteamientos y de acuerdo a las evidencias, se logró identificar a los elementos que caracterizan el aprendizaje colaborativo:

1. Responsabilidad individual: Al acudir a las sesiones de aula y para participar en la adaptación del escenario de grabación como actor y como director de escena.
2. Interdependencia positiva: Algunos alumnos grabaron y otros ayudaron a sus compañeros a desarrollar la actividad, ya sea con el Tracker o en el escenario.
3. Habilidades de colaboración: En la discusión para explicar la relación entre la situación problema y lo mostrado en la pantalla de la computadora.
4. Interacción promotora: En la elaboración del reporte y la presentación con todo el grupo.
5. Proceso de grupo: El equipo reflexionó sobre todo lo desarrollado en el aula y en el trabajo de campo en la Unidad Deportiva, tuvieron una observación participante en la sesión grupal en las presentaciones de los otros equipos, entregaron sus reportes y las conclusiones.

Video digital en la enseñanza de las matemáticas

Como lo señala Jofrey (2010), el video digital se ha introducido en el aula con mayor fuerza que el video analógico, porque los controles de una VCR obstaculizaban la consulta de un video, a diferencia de los dispositivos de grabación y los programas para manipular video, una de las causas que en los últimos años ha mostrado la conveniencia de su introducción en el aula, para aprovechar su potencial de expresión y comunicación que ofrece un video digital. Uno de los beneficios de la tecnología de análisis de vídeo es que los estudiantes pueden visualizar varias representaciones de la misma situación problema, por ejemplo, del video digital del movimiento del ciclista se visualiza : una fotografía pictórica, tablas de datos, gráficas, fórmulas matemáticas y descripciones verbales y escritas (Jofrey, 2005).

En la actualidad se vive en una sociedad que cada vez es más visual, los estudiantes se interesan más en consultar videos de su interés en las bases de datos de internet, aunado a la disminución del costo de las videocámaras y en el desarrollo de tecnologías que facilitan el uso y distribución de medio y materiales educativos digitales. La producción de clips de videos educativos apoya la enseñanza, porque ofrece la oportunidad para comprender y desarrollar capacidades intelectuales durante el proceso y promover que los estudiantes se conviertan en creadores o diseñadores, con la finalidad de alcanzar una mayor profundidad en los temas de estudio.

Registrar en video objetos que se mueven o de situaciones reales, facilita a los docentes incorporar en el aula investigaciones auténticas que permitan a los estudiantes, con ayuda de software especializado, mejorar la comprensión de conceptos a aprender, así como a realizar representaciones gráficas, analíticas y numéricas de situaciones problema relacionadas con la vida cotidiana, como lo señalan Calderón, Núñez y Gil (2009) en el que utilizan la cámara digital como instrumento de laboratorio de Física para el estudio de un proyectil lanzado por un dispositivo de fabricación artesanal, que tuvo por objetivo comparar las predicciones teóricas con los resultados experimentales.

En Tracker los estudiantes pueden “marcar” la posición de un objeto en cada uno de los cuadros de un clip de video, para obtener información sobre su posición y velocidad, señalar los cuadros por segundo (*FPS*) de video (Ver Figura 3), seleccionar la sección de video de interés y calibrar la interfase para relacionar las medidas del escenario real con la pantalla de la computadora, entre muchas otras funciones que se pueden realizar con las rutinas del programa.

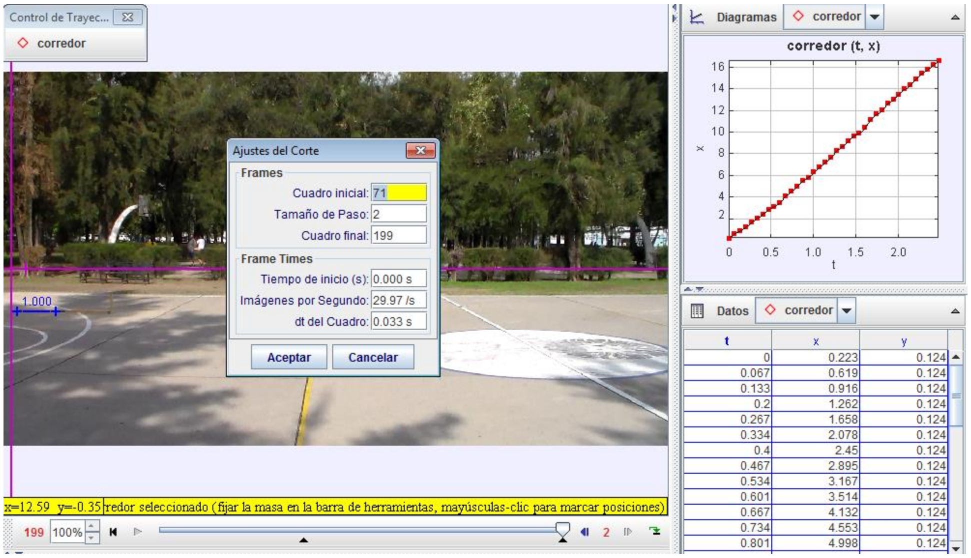


Figura 3. Herramienta de ajuste de corte

Aprendizaje Basado el Problemas (ABP)

El aprendizaje basado en problemas se utiliza como una estrategia de enseñanza, que elabora y estructura el currículo con base en problemas y no en disciplinas, que permite a los estudiantes construir conocimientos a partir de una situación problema de la vida real y cuyo objetivo es el logro de las competencias integradas en la asignatura.

Según Téllez (2010) es una forma de enseñanza y aprendizaje fundado en el enfoque de solución de problemas reales, en el que se sitúa al estudiante en un contexto que le permite integrar nuevos conocimientos mediante el desarrollo de un proceso de investigación y aplicación del mismo, así como en la presentación de alternativas de solución del problema en cualquier área, en este caso, de la modelación matemática de situaciones problemas de la vida cotidiana del estudiante.

Aunque algunos profesores de matemáticas no consideran a la creatividad durante el proceso de solución de un problema, es una realidad que el estudiante la pone en práctica en algún momento, porque se observa cuando utiliza una estrategia diferentes a la que se le ha “enseñado” y en ocasiones el profesor lo obliga a solucionarlo como él dice, lo que potencialmente afecta el desempeño y/o aprendizaje del estudiante de matemáticas.

En el estudio, los alumnos se enfrentaron a seleccionar la situación problema, a diseñar colaborativamente el escenario de grabación, a manipular la cámara de video, ya sea de su dispositivo móvil o de la video cámara estándar, a discutir e interpretar lo presentado por Tracker en la pantalla, entre otras actividades. Manifestaron que este tipo de trabajo nunca lo habían realizado y que no pensaron en la correspondencia con las matemáticas, pues en las presentaciones realizadas frente a todo el grupo, declararon que al inicio no sabían a qué se enfrentaban, pero que se sintieron satisfechos con los resultados de aprendizaje obtenidos, pero la más sustancial, es su afirmación de que les encantó la estrategia planteada, porque lograron relacionar un polinomio, las gráficas y los datos con la situación problema, ya fuera en Tracker o en MathCad.

En el análisis heurístico de la situación problema, los alumnos pusieron en juego los conocimientos previos, sus habilidades y el trabajo colaborativo, elementos esenciales que permiten resolver problemas relacionados con situaciones de la vida cotidiana, proceso que se pretende culmine en la obtención de un modelo matemático, análisis e interpretación de la situación en cuestión (Ver Figura 4).

Figura 4. Esquema de resolución de problemas y el proceso heurístico.

Teoría de Raymond Duval

Es sabido que la cátedra tradicional se orienta hacia lo algorítmico y se deja de lado lo que Duval (1995, citado en D'Amore, 2009) llama las representaciones semióticas de un objeto matemático, sistema de signos que permite llevar a cabo las funciones de comunicación, tratamiento y objetivación. En este estudio, el sistema de representación semiótica fue de utilidad dado que el profesor planteó de manera verbal y por escrito, diversas situaciones problema, relacionadas con su contexto para que eligieran con la que trabajarían, para posteriormente, mostrar los registros analítico, numérico, gráfico, que en el caso del lanzamiento del balón, se relacionaron con el objeto matemático Parábola y sus representaciones semióticas, a saber:

- las gráficas de la parábola en sus diferentes posiciones en el plano cartesiano,
- los problemas de la vida cotidiana, en este caso, el lanzamiento del balón al aro del juego de basquetbol,
- las ecuaciones, en función de su posición en el plano cartesiano,
- las parejas ordenadas obtenidas de una medición de las variables en una situación problema y
- la descripción del objeto matemático en lenguaje común.

Todas estas representaciones semióticas no se obtienen de manera natural (Figura 5), ya que es el profesor quien debe diseñar actividades para que el alumno logre apropiarse de ellos, es decir, con propósitos comunicativos.

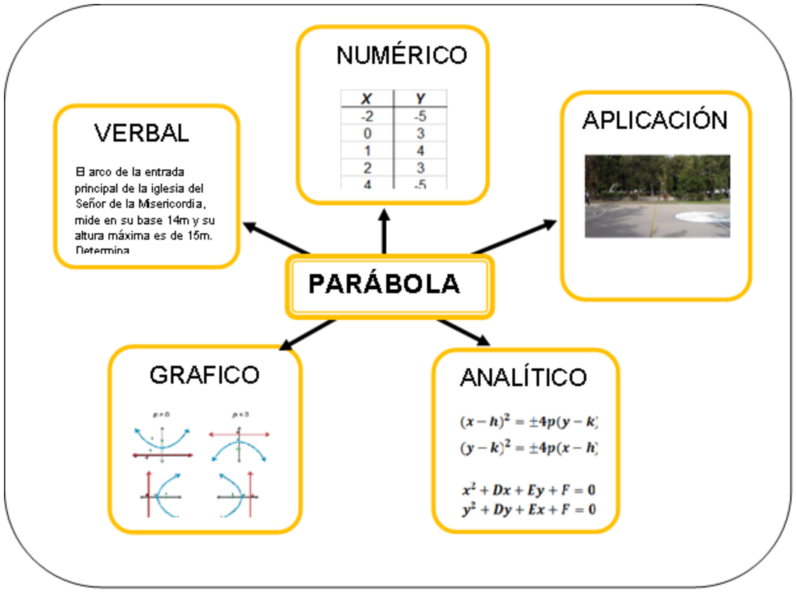


Figura 5. Registros semióticos del objeto parábola

Para Duval (2006) la actividad intelectual consiste esencialmente en la transformación de las representaciones semióticas, las cuales son de dos tipos: tratamiento y conversión. El tratamiento sucede cuando una transformación produce otra al interior de un mismo registro y hace relevante la elección del "mejor" cambio de registro para resolver el problema dado, al transformar internamente el registro.

En el objeto matemático Parábola, se realizan diferentes transformaciones dentro de un mismo registro, por ejemplo, si se considera el registro analítico, se puede aplicar el tratamiento a la ecuación ordinaria de la parábola $(x+2)^2 = -4(y+1)$ para obtener la ecuación general $x^2 + 4x + 4y + 8 = 0$ o viceversa. La conversión de acuerdo a Duval (1995) se refiere a la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial, es el cambio de un registro a otro, así por ejemplo del registro gráfico al registro analítico (Figura 6) o del registro verbal hacer la conversión al registro gráfico, numérico o analítico, para que el estudiante pueda interiorizar su conocimiento.

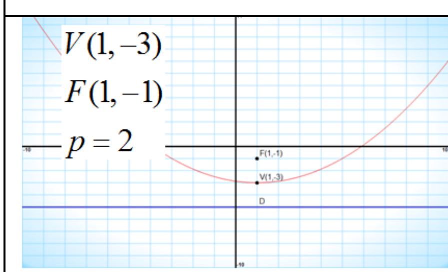
Registro Gráfico	Registro Analítico
	$(x-h)^2 = \pm 4p(y-k)$ $(x-1)^2 = 4(2)(y-k)$ $x^2 - 2x - 8y - 23 = 0$

Figura 6. Conversión del registro grafico al analítico.

La conversión cognitiva rápida y espontánea de la coordinación de al menos dos registros de representación, es la base de la comprensión (integral) de un contenido conceptual, situación que el alumno tuvo que enfrentar cuando en la pantalla del computador se muestra el video del movimiento del balón, tres gráficas que representan el movimiento y los datos numéricos de la posición respecto del tiempo y de su posición. Con otra rutina, se presenta la opción de seleccionar la función que más se apega a los datos, en suma, los estudiantes en trabajo colaborativo tuvieron que interpretar las distintas conversiones entre los registros del objeto parábola con la situación problema del movimiento del proyectil.

Visualización

El proceso cognitivo de la visualización ayuda a comprender un concepto por medio de una imagen visual y representa una opción para lograr aprendizaje en los estudiantes (Gatica y Ares, 2012). La visualización matemática (Hitt, 2002) tiene que ver con el entendimiento de un enunciado y la puesta en marcha de una actividad, que puede o no llevar a la respuesta correcta, pero que sí induce a profundizar en la situación que se trata. Una de las características de la visualización es el vínculo entre representaciones para la búsqueda de la solución a un problema determinado.

La visualización no corresponde sólo a la capacidad física de ver un objeto, por ejemplo si se habla de matemáticas, en el caso particular de la parábola, visualizar no es solo verla de manera gráfica, sino que implica la interiorización del concepto en su totalidad, por medio de las transformaciones semióticas y conversiones entre los registros del objeto, es decir, la visualización es el proceso cognitivo de manipularlo, de generar una imagen mental, de cambiarla cuando se modifican sus elementos, de trasladarla o reflejarla o de pensar en su ecuación a partir de la gráfica, en que se puede obtener por medio de una tabulación, trasladarla a su contexto, relacionarla con la estructura de un puente, con la trayectoria de un objeto en caída libre o con el lanzamiento de una partícula, con el marco de una puerta de casa o con cualquier otra aplicación que sea de interés personal o que tenga relación con su vida cotidiana.

Cantoral (2001) establece que la visualización no puede ser entendida como el simple acto de ver, sino como la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento y el lenguaje del que aprende, así que de acuerdo a los resultados presentados en la sesión grupal, los estudiantes lograron apropiarse de las representaciones para cada una de las situaciones problema grabadas en video en la unidad deportiva y en el coliseo del Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías (CUCEI) de la Universidad de Guadalajara.

Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC)

Actualmente la sociedad es usuaria cotidiana de la tecnología, basta con observar que la mayoría de las personas cuenta con teléfono celular, ipod, computadoras portátiles, calculadoras, graficadoras, tabletas electrónicas y agendas electrónicas, y entonces surge una pregunta: ¿Por qué si la sociedad ha valorado positivamente el uso de la tecnología en diferentes medios sociales como el hogar, trabajo, servicios, entre otras, no lo ha hecho en el aula de matemáticas? Durante las reuniones de academia de Análisis Numérico del Departamento de Matemáticas del CUCEI se ha discutido el empleo de la tecnología en el aula y una de las discusiones permanentes es sobre por qué los profesores se rehúsan a utilizar la tecnología. Algunos de los argumentos son que el uso de la tecnología trae consigo la pérdida de habilidades aritméticas, geométricas o de pensamiento en el alumno, y por otro lado, el profesor no es asiduo al trabajo con la tecnología, no se siente capaz, no se actualiza, no quiere salir de su zona de confort, ya que implica trabajo, tiempo y dedicación y es más fácil no usar las TIC en sus clases.

Se ha observado que los estudiantes de la materia de Análisis Numérico, muestran dificultades para observar y transferir los conocimientos adquiridos de los métodos de solución de ecuaciones no lineales, sistemas de ecuaciones lineales, ecuaciones diferenciales ordinarias con valores iniciales, interpolación y ajuste de funciones a situaciones problemas relacionados con su contexto, por ello, se propone integrar la modelación matemática para que el estudiante trabaje con una situación problema de la vida cotidiana, que le sea interesante para encontrar la expresión matemática con apoyo de las TIC que la describe y regresar a explicar tal situación, como lo mostraron los estudiantes en la sesión plenaria.

ACODESA

En la metodología ACODESA se toma en consideración el trabajo individual y en grupo colaborativo, debate en el aula y auto-reflexión. Es una adaptación a un acercamiento de interaccionismo social del aprendizaje de las matemáticas (ver Hitt, 2007; Hitt *et al.*, 2008; Gonzalez-Martin *et al.*, 2008, Hitt & Cortés, 2009; Páez, 2004). En las 3 primeras fases el profesor funge como un guía y se deja a los estudiantes argumentar y validar sus producciones en el proceso de institucionalización. (Ver Tabla 3):

Tabla 3. *La metodología ACODESA y su relación con el estudio propuesto*

Trabajo individual (producción de representaciones funcionales para comprender la situación problema).	Ocurre en la participación del estudiante en el curso taller, en la modelación de la situación problema y en el diseño del escenario de grabación por ejemplo al lanzar el balón o realizar una carrera.
Trabajo en equipo sobre una misma situación. Proceso de discusión y validación (refinamiento de las representaciones funcionales).	Se presenta en la grabación de las situaciones problema seleccionadas, en la obtención del modelo matemático y en la elaboración de reportes del trabajo realizado.
Debate (que puede convertirse en un debate científico).	En el proceso de obtención e interpretación del modelo matemático, presentación del trabajo, elaboración de reportes y conclusiones.
Trabajo individual: reconstrucción y auto-reflexión.	En la fase final se les pidió que realizaran el proceso con una situación problema y hacer el análisis correspondiente.
Institucionalización.	Ocurre en la presentación de los trabajos en grupos colaborativos durante la discusión grupal y revisión de los reportes entregados.

Resultados

Descripción de la fase de campo

Las situaciones problema tratadas fueron: movimiento: corredor, ciclista, automovil real y de juguete, motociclista y patinadora; lanzamiento de un balón en los juegos de voleibol, basquetbol, futbol soccer, futbol americano, frontón y caída libre; rodado de una llanta de bicicleta sin resbalar y girando sobre su eje; el llenado y vaciado de recipientes; el movimiento de un yoyo.

Los escenarios de grabación fueron la unidad deportiva y el coliseo olímpico del CUCEI, el aula y una carretera local. Previo a cada grabación de las escenas, se platicó con los estudiantes sobre la importancia de relacionar los conceptos matemáticos aprendidos en el aula de clases en situaciones cotidianas, además de hacer patente que la cámara de video se ubicara perpendicular al escenario, que la unidad de medida estuviera visible y que el actor o el objeto en movimiento portara un distintivo perceptible en todo momento en el video, porque de esa manera se genera menor error en los datos durante la transición de lo real a lo virtual. En la Figura 7 se muestran dos escenarios de grabación: caída libre y basquetbol.

Los alumnos se recrearon mucho, se mostraron interesados y contentos porque se divertían en su clase de matemáticas, suceso que pocas veces habían experimentado, a saber por los comentarios que hacían entre ellos, extendidos hacia el profesor. También se observó que no muchos están acostumbrados a jugar, no lanzaban bien el balón o al principio se tardaban un poco en participar, pero finalmente todos aceptaron y ya no fue un martirio jugar y aprender matemáticas.

Figura 7. Imágenes de la caída de un objeto y tiro a canasta al aro de basquetbol.

A continuación se presentan discusiones propiciadas entre el profesor y alumnos en tres situaciones problema.

Caída libre

Es interesante la forma en cómo el trabajo de campo llamó la atención de los estudiantes, por ejemplo, el diálogo entre profesora y alumnos en el caso de la caída libre (Tabla 4), muestra que el trabajo colaborativo propició la discusión sobre cuál era la posición más conveniente de los ejes, el corte del video sobre el desplazamiento del objeto en cuestión y el movimiento que se analizaría, el número de cuadros que se tomaría en cuenta, entre otros parámetros.

Tabla 4. *Conversación entre alumnos 4 y el profesor de la situación problema de la caída libre*

Pedro: Maestra…en este video (caída libre de la pelota), el aire nos la mueve un poquito del eje de las x. ¿eso no lo tomamos? Lo tomamos como si fuera un margen…

Profesora: ¿Tú crees que te puede generar problemas cuando se desvía (la pelota)?

Thelma: más bien… lo que nos interesa es la caída libre…o sea "y".

Pedro: lo que estamos planteando o lo que nos interesa es la caída en "y"…entonces… sí hay margen de error si tomamos x porque se va desviando…pero ya es por causas más externas por el material de la pelota o por la presencia del aire…entonces lo que nosotros hicimos…mmm este…pues a la "y"…la duda es…por ejemplo…aquí (señala la pantalla del video en Tracker) terminamos el corte (del video) cuando la pelota toca el suelo? ó ¿También cuando da el bote (la pelota)?...

Un integrante de otro grupo interrumpe la conversación y contesta:

Solo la caída libre.

Profesora: puedes tomar todo el movimiento y hacer el ajuste de todo…desde que la sueltas (la pelota) hasta que rebota…o incluso cuando haya salido del cuadro y tomar todo el movimiento…pero…ustedes van a decidir qué es lo que te interesa… pueden hacer todo el tratamiento en Tracker…ustedes son libres de ubicar…sabes que de aquí a aquí (hace señas con las manos sobre la caída libre de la pelota) esto es lo que me interesa y lo demás no lo voy a tomar en cuenta…lo que decidas es correcto. A ver…si toman hasta abajo (refiriéndose a la caída de la pelota del balón hasta que toca el suelo) ¿sigue siendo caída libre?

Luis Fernando: Sí.

Profesora: Ah pues entonces pueden decidir de aquí a aquí es lo que me interesa y es con lo que van a trabajar.

Luis Fernando: ¿Entonces puede ser hasta la medida de la regla?

Thelma: Sí

Profesora: Sí, pueden tomarlo así.

Thelma: ¿Y nuestro eje no importa si lo ponemos arriba o abajo?

Luis Fernando: Nada más sería…lo de cambio de signo ¿no? Si está arriba (refiriéndose a que los ejes se sitúen cuando se suelta la pelota)

Profesora: Exactamente…de todas maneras obtendrían el ajuste…el punto donde ustedes quieren tomar el punto de referencia…el origen…si lo quieren en el piso o va a ser a partir desde donde se ve la pelota…como dicen solo va a ser el signo…si lo sitúan arriba va a empezar de menos.

Pedro: ah…ok. Gracias.

El ciclista

En otro equipo se analizó el video del movimiento del ciclista y en sus conclusiones (Tabla 5) se nota que sus aportaciones evidencian que comprendieron y analizaron el movimiento, pensaron en los factores que intervienen, como son la duración del video, las características de la bicicleta y fueron capaces de imaginar y hacer conjeturas al respecto. Además, a partir del análisis realizado sobre el ciclista extrapolaron algunas ideas, ya que pensaron en situaciones cotidianas y de interés para ellos mismos, como idealizar al mejor jugador de futbol del mundo, además de que relacionaron las matemáticas, la modelación y el análisis de situaciones reales con una película que vieron en algún momento de su vida (Ver Figura 8).

Figura 8. Integrantes del grupo 3, durante la exposición de la situación problema.

Tabla 5. *Conversación entre alumnos y el profesor de la situación problema del ciclista.*

Samuel: … Como nos pudimos dar cuenta en el video el fenómeno no es constante…sino que tiene algunas variables que no son contempladas, que en ocasiones nos pueden generar cierto ruido a la hora de analizarlos en un programa que te detecta "frame" por "frame".
Profesora: ¿Como cuáles?
Samuel: por ejemplo, la variable de bajar el pedaleo y que se mostraba el punto en el cual se desprendía un movimiento parabólico y luego un movimiento lineal y después volvía a mantener de cierto modo la conducta que tenía antes de que el pie bajara junto con el pedal.
Profesora: ¿Crees que si hubiera sido más largo el tiempo de duración del video…hubiera intervenido algún otro factor aparte del que mencionas?
Samuel: No lo creo, ya que tenemos la teoría de que si se hubiera mantenido la grabación del video, hubiera habido un punto en el que el ciclista hubiera tenido una velocidad constante y la gráfica fuera completamente lineal, creo que en ese momento no hubiera habido tantas interferencias…mmm…tantas variables inesperadas.
Profesora: pero no crees que se hubiera cansado el ciclista, porque ustedes no saben, pero la bicicleta estaba muy dura y el ciclista hizo mucho esfuerzo en pedalear la bicicleta.
Guillermo: Puede ocurrir que el ciclista se canse o no esté controlando bien la bicicleta o que no tenga bien ajustada la velocidad.
Johor: También, es que creo, que es una bicicleta para hacer acrobacias (risas) y no puede aplicar (el ciclista) tanta velocidad a una bicicleta de ese estilo, tenía que haber sido una bicicleta especial para corredores que son más ligeras, que tienen las velocidades más blandas… que estén más ajustadas las velocidades.
Profesora: pero…aún con todo eso…si en nuestras manos estuviera resolver todo este tipo de factores… ¿creen que el modelo matemático hubiera sido el mismo?...si la situación es la misma, ¿también hubieran obtenido una parábola?
Todos: Sí.
Ricardo: Si hubiéramos resuelto todos esos problemas, que no se cansara ni nada, se supone que la aceleración tiene que ser constante y la gráfica obtenida es una parábola...
En cuanto a mis conclusiones…yo creo que es muy interesante hacer este tipo de trabajos porque te pones a considerar cuestiones físicas en la vida cotidiana y te pones a pensar…no sé…por ejemplo, un físico que sea bastante bueno en este tipo de estudios y se pusiera a

analizar por ejemplo los tiros en los partidos de futbol o de basquetbol y así…no se…sería interesante ver un físico que resultara el mejor jugador del mundo. (Risas). **Profesora:** Ganaríamos el mundial en Brasil **Todos:** Sí. (Risas). **Ricardo:** Hay una película acerca de una chava que estudiaba cuestiones físicas y las aplicaba en el patinaje sobre hielo y resultó que pudo hacer un movimiento que era imposible y lo logró nada más estudiando las cuestiones físicas. **Profesora:** Muy bien muchachos. Muchas gracias.

El tipo de actividades que aquí se proponen y los comentarios, conclusiones y argumentos de cada grupo colaborativo, ponen de manifiesto que los estudiantes pueden ir más allá de la aplicación de un mero algoritmo y que hay cosas que les interesan y se relacionan con operaciones y algoritmos de matemáticas, situación que debe motivar a los profesores para incluir actividades que a los estudiantes les interese para aprender matemáticas en lugar de aprender algoritmos totalmente desfasados de su contexto y de la realidad.

Ajuste del polinomio con MathCad para el desplazamiento del corredor

En el escenario de la situación problema para el corredor, se grabaron tres videos: en el primero el corredor parte del reposo y se le pide que incremente su velocidad hasta llegar a la meta, en el segundo, el corredor entra a escena corriendo y mantiene su velocidad y en la tercera, el corredor parte del reposo, llega a la meta y se regresa al punto de salida. En este caso participaron mujeres y hombres, que por su naturaleza presentan diferencias significativas en cuanto a peso, estatura, edad, fuerza, agilidad, etc. Para esta situación problema se analizan dos situaciones:

a) Se entabló una discusión en la que se tratan los desplazamientos de la trayectoria de un hombre y de una mujer y en la Tabla 6 se muestra una parte del diálogo entre el profesor y los alumnos. En la Figura 9 se muestran las gráficas para los movimientos de un corredor (i) y una corredora (ii), que son muy semejantes, que es lo que comenta el alumno César. En este caso, los datos difieren porque el hombre es más veloz que la mujer, pero en otros casos, tiene igual o mayor velocidad que algunos hombres.

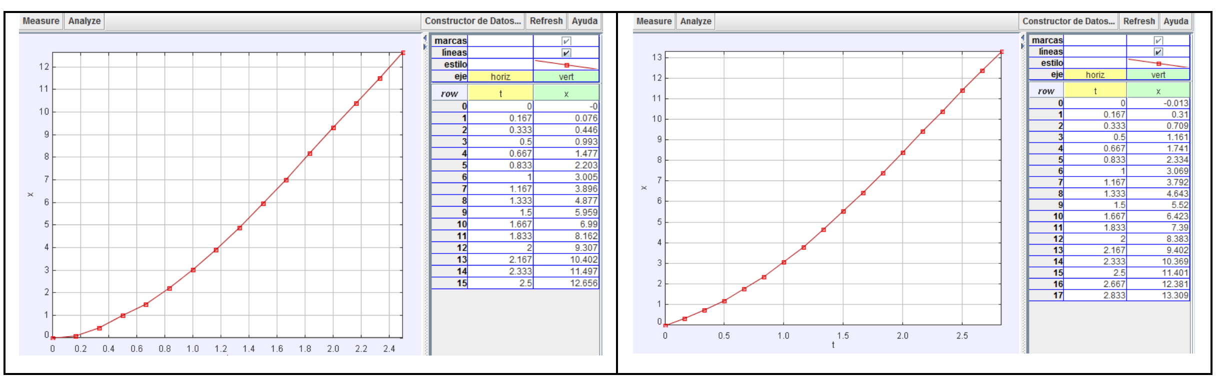


Figura 9. Comparación de las gráficas de un corredor y una corredora.

Tabla 6. *Discusión de la situación problema para el corredor.*

César: *Ammm…pues…tenía un maestro en la secundaria que nos decía que nadie es igual a ti (señala a una persona), nadie es igual a ti (señala a otra persona), yo creo que ese*

maestro nunca vio el universo en forma matemática, si yo le presentara estas dos gráficas (ver Figura 8) *y yo le dijera (al profesor) ¿qué diferencia hay entre esas dos gráficas?...no pues…las dos parecen ser lo mismo (respuesta supuesta del profesor)…y si yo le dijera que son dos personas diferentes.*

…Esto nos puede decir que podemos obtener datos y patrones de todo lo que observamos cotidianamente y a patrones me refiero a que cualquier persona…así de tamaño bajito, flaco, pueden tener los mismos patrones, pueden tener ese mismo ajuste…con esa misma función podemos analizar a muchas personas con ese mismo movimiento obviamente…este…no solamente corriendo.

…Un día vi una película donde analizaban el movimiento de las boyas de mar…este…hacían no sé qué para la guerra…me imagino que es algo así…porque normalmente la playa se comporta de una misma forma…entonces cuando hay alteraciones…si hay algún barco, algún submarino…que si hay una motoneta o cualquier cosa…pues la boya se comporta de diferentes formas…entonces puede analizarse y sacar un tipo de ajuste…sacar…pues… lo que más se repite y cuando hay alguna alteración saber de qué se trata, por ejemplo si se trata de un barco…saber cuál es el tamaño del barco…este…el peso del barco…etc.…¿no?.

…Yo creo que es muy interesante ver cómo pues…cómo una misma función nos puede hablar de muchas personas ¿no?...porque como podemos ver la misma función fue el polinomio de grado 4, con esa misma analizamos a los dos corredores…que nada que ver, porque uno era mujer, un poco más bajita, corría menos y el otro era un hombre y corría más rápido, era más alto, más delgado y aún así lo pudimos analizar con la misma función.

El pensamiento y razonamiento de este estudiante, muestra que relacionó la actividad de modelación matemática con situaciones de su vida, como cuando cursaba la secundaria y con una película ajena a las situaciones que se trabajaron. También se dio cuenta que ciertas funciones matemáticas pueden ser utilizadas para aplicarse al movimiento de personas diferentes o situaciones diferentes, siempre y cuando presenten ciertos patrones y sean útiles en diferentes áreas como la oceanográfica, en la guerra o en el momento que vive el corredor.

b) Los alumnos exportaron los datos (ver Tabla 7) que el Tracker calculó a partir del tratamiento del video, al programa MathCad, porque el grado del polinomio que se incluye la rutina "*Herramienta de datos*" del Tracker es hasta el de tercer grado. Así que los alumnos exportaron los datos de las variables de su interés (en este caso ***t*** y ***x***), con la finalidad de aplicar el método de mínimos cuadrados, que marca el programa de Análisis Numérico, para determinar el mejor polinomio de ajuste a los datos, que resultó ser de cuarto grado. En la Tabla 8 se observan algunos de los elementos que el alumno calculó con el programa MathCad.

Tabla 7. *Datos exportados para el ajuste del polinomio con el MathCad.*

t	0	.167	.333	.5	.667	.833	1	1.17	1.33	1.5	1.67	1.83	2	2.17	2.33	2.5
x	0	.0764	.446	.993	1.48	2.2	3	3.9	4.88	5.96	6.99	8.16	9.31	1.04	1.15	1.27

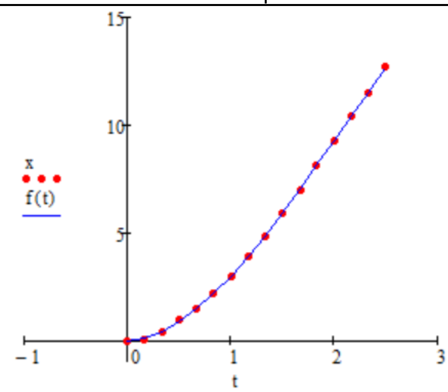
Tabla 8. *Elementos matemáticos calculados con el software MathCad*

Matriz de los coeficiente

$$AA = \begin{pmatrix} 3368.69068872 & 1471.49437656 & 652.74043711 & 295.47448186 & 137.52266559 \\ 1471.49437656 & 652.74043711 & 295.47448186 & 137.52266559 & 66.649184 \\ 652.74043711 & 295.47448186 & 137.52266559 & 66.649184 & 34.440956 \\ 295.47448186 & 137.52266559 & 66.649184 & 34.440956 & 20 \\ 137.52266559 & 66.649184 & 34.440956 & 20 & 16 \end{pmatrix}$$

Matriz de los términos independientes	Solución del sistema
$BB = \begin{pmatrix} 1417.65306871 \\ 649.9133577 \\ 307.70711573 \\ 152.8100368 \\ 81.9954 \end{pmatrix}$	$MM = \begin{pmatrix} -0.0006 \\ -0.4938 \\ 3.0937 \\ 0.4399 \\ -0.0225 \end{pmatrix}$

$f(t) = -.0006t^4 - 0.4938t^3 + 3.0937t^2 + 0.4399t - 0.0225$	Polinomio de ajuste a los datos del corredor



Análisis de la encuesta

La encuesta se integró de seis bloques relacionados con aspectos del proceso de solución de problemas, el empleo del programa Tracker, el papel del profesor, la realización de las actividades, el desempeño grupal, individual, las actividades, la presentación en sesión grupal y tres preguntas abiertas.

Con base en las respuestas dadas por los estudiantes, se intuye que tienen habilidades para resolver problemas matemáticos, que aprenden de mejor manera si se trabaja en forma colaborativa, en la cual se exponen ideas, escuchan a sus compañeros, llegan a acuerdos, conviven con sus compañeros y se propicia aprendizaje, les gustó trabajar con el programa Tracker, lo creen útil y consideran que su empleo facilita la comprensión de situaciones reales en matemáticas, además que el uso del software aumenta el interés y motivación para aprender matemáticas y consideran importante la actitud y la disposición del profesor para propiciar aprendizaje.

Pregunta. ¿Consideras importante el empleo de la tecnología?

Todas las respuestas coincidieron que la tecnología es importante para aprender matemáticas, enseguida se muestra la respuesta más representativa:

Respuesta: *"Sí, yo opino que sí, debido a que desde siempre las personas buscamos la* *manera de siempre usar los recursos necesarios de modo que podamos facilitar siempre el trabajo. En esta época en la cual la tecnología está revolucionando el mundo es importante empezar a aplicarla más en el aprendizaje y menos en actividades de ocio"*

Pregunta: ¿Consideras importante el uso de situaciones reales en matemáticas? Justifica tu respuesta.

Las respuestas dadas coinciden en que el empleo de situaciones reales en matemáticas permite comprender conceptos y algoritmos matemáticos y relacionar situaciones cotidianas con las matemáticas. Se muestran algunas respuestas interesantes.

Respuesta: *"Sí, porque eso te demuestra que las matemáticas sí son necesarias y no son sólo un conocimiento inútil y además, eso motiva a la gente a despertar el gusto por las matemáticas"*

Pregunta: Referente a los comentarios de los alumnos:

Comentario 1: *"Si este programa (se refiere a Tracker) lo utilizaran para enseñar mecánica de seguro la situación sería diferente para los alumnos"*

Comentario 2: *"Es fantástico como un salón que empezó desde cero con unos cuantos compañeros que apenas se conocían comenzó a entablar un marco de amistad gracias a este tipo de actividades, pero sobre todo el como ahora todos conocemos este software (se refiere a Tracker) y la experiencia que nos dejó el haber trabajado con el"*

Comentario 3: *"Me encantó la forma de trabajar en esta materia. Me sentí bastante cómodo y creo que gracias a ello puedo explotar mejor mis habilidades. Me gustó la forma de trabajar en el proyecto, no fue tan pesado ni tan tedioso como en otras cosas. Me gustó la forma en que la maestra imparte la clase, de forma interesante y divertida al mismo tiempo"*

Comentario 4: *"Sugiero que se implementen más este tipo de métodos de enseñanza en otras materias y si fuera posible con todos los temas. También sugiero alentar a los alumnos a traer cada quien sus lap top".*

Comentario 5: *"Es buena idea tener programas como Tracker para poder complementar una clase de Análisis Numérico. Debería de ser obligatorio que este curso permitiera la aplicación de programas como MathCad y Tracker. Tal vez más tiempo para familiarizarnos con el software hubiese tenido mejores resultados al momento de realizar el proyecto"*

Comentario 6: *"Como dato anecdótico, no esperaba que esta fuera la materia estrella de este semestre, me equivoqué, terminé amando la materia, su aplicación, sus métodos, etc. Eso sumado a una maestra que realmente se preocupa por enseñar, felicidades por el planteamiento del curso y la forma de enseñar matemáticas"*

Comentario 7: *"Considero que la actividad de modelado fue muy buena porque no en todas las materias nos enseñan en qué podemos utilizar lo que nos enseñan"*

Comentario 8: *"Yo creo que los trabajos en grupos son buenos porque comprometen a los integrantes a estudiar, aparte propicia más confianza y por lo tanto se aclaran más dudas"*

Conclusiones

Las actividades que incluyen situaciones problema en cursos de matemáticas, con el empleo de la tecnología y el trabajo colaborativo, permiten al alumno tomar un rol activo en su aprendizaje, porque mediante la propia experiencia construye conceptos y desarrolla habilidades; mediante la interacción con sus compañeros, se enriquecen y fortalecen las ideas, los conocimientos, los argumentos y conclusiones expuestas por cada integrante del grupo para defender sus ideas, concepciones y puntos de vista basados en experiencias anteriores, conocimientos y habilidades adquiridas a los largo de su educación.

La selección de situaciones problema relacionadas con el contexto del estudiante, genera ventajas sobre las actividades algorítmicas que generalmente se trabajan en el aula de clases, porque enfrentan al alumno a un escenario completamente diferente y real, lo que motiva a aprender matemáticas de manera activa, divertida y con un objetivo claro para el estudiante debido a que encuentra útil los conceptos y algoritmos matemáticos aprendidos en el salón de clases.

La modelación matemática como recurso didáctico en el aula de clases y fuera de ella, aplicado a cada situación de la vida cotidiana asignadas a cada equipo colaborativo, es una buena opción para que el alumno discuta y exponga sus ideas, perspectivas, conocimientos propios, con el que se propicia interés por el aprendizaje de las matemáticas mediante su relación con situaciones de su contexto, además de permitir involucrarse en forma activa y dinámica en su aprendizaje.

El uso de las TIC, en este caso el software Tracker y video digital, es responsabilidad principalmente del docente, el cual debe ser consciente de la importancia que tienen y del tiempo de aprendizaje que invierte el estudiante, así como priorizar las actividades a desarrollar, en la que se reflejen las representaciones semióticas, los tratamientos y las conversiones entre registros y considerar además su utilización como una ventaja por el interés y la motivación por el uso de la tecnología.

El empleo de la tecnología motiva al alumno a aprender matemáticas, facilita la interpretación de datos y gráficos obtenidos a partir de situaciones reales y fáciles de identificar para el estudiante, también le permite construir el conocimiento, a reflexionar sobre los procedimientos empleados, los parámetros y variables que intervienen en el análisis de un fenómeno en cuestión.

El trabajo colaborativo es un aspecto importante en la modelación matemática, que se complementa con la resolución de problemas para hacer interesante al alumno el aprendizaje de las matemáticas, en particular, del ajuste de polinomios reales de una variable real.

El video digital empleado de las situaciones problema, proporciona una manera fácil y eficiente de obtener gráficas y datos numéricos, mismos que fueron interpretados por los estudiantes para obtener la mejor representación del fenómeno.

Por último, es importante resaltar la importancia de hacerle saber al estudiante que los profesores se interesan no sólo porque pasen un examen sino también porque aprendan, también necesitan sentirse importantes y apoyados por el profesor, porque pusieron énfasis en agradecer la forma en la que fueron tratados por el profesor y las actividades que diseñaron para mejorar su aprendizaje.

Referencias Bibliográficas

Arrieta, J., Carbajal, H., Díaz, J., Galicia, A., Landa, L., Mancilla, V., Medina, R., y Miranda, E. (2007). Las prácticas de modelación de los estudiantes ante la problemática de la contaminación del río de la Sabana. En C. Crespo Crespo (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 20,* 473-477. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Arrieta, J., Díaz, L. (2015). *Una perspectiva de la modelación desde la socioepistemología*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, vol. 18, núm. 1, pp. 19-48. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33535428002

Blomhoj, M. (2009). Modelación Matemática - A theory for practice. En Clarke, B.; Clarke, D. Emanuelsson, G.; Johnansson, B.; Lambdin, D.; Lester, F. Walby, A. & Walby, K. (Eds.*) International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics in National. Centre for Mathematics Education* (págs. 145 -159). Suecia.

Blum, W., Berry, J., Biehler, R., Huntley, I., Kaiser-Messmer, G. y Profke, L. (Eds.). *Applications and modeling in learning and teaching mathematics*. (Ellis Horwood Limited Publishers, 1989).

Blum, W., Berry, J., Biehler, R., Huntley, I., Kaiser-Messmer, G. y Profke, L. (Eds.). (1989). Applications and modelling in learning and teaching mathematics. Ellis Horwood Limited Publishers.

Calderón, S., Núñez, P. y Gil, S. (2009). La cámara digital como instrumento de laboratorio: estudio del tiro oblicuo. *Latin American Physics Education. Vol. 3. No.* 1. pp 87-92. *http://www.journal.lapen.org.mx*.

Cordero, F. (2004). *La modelación y la enseñanza de las matemáticas*. Innovación Educativa. 21 IPN. México.

Cordero, F. (2004). *La modelación y la enseñanza de las matemáticas (Mathematics modeling and teaching)*. Innovación Educativa. 2. IPN, México.

Cordero, F., Suárez, L. (2005). Modelación en matemática educativa. *Revista Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 18(1), 639.

Córdoba, F. (2011). *La modelación matemática educativa: una práctica para el trabajo de aula en ingeniería.* Tesis de maestría. Instituto Politécnico Nacional. México. Distrito Federal.

Duval, R. (1995). Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissage intellectuels. Peter Lang, Suisse.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 9 (1),* 143–168.

Ezquerra, A. (s/f). Análisis De Magnitudes Físicas Sobre Imágenes De Vídeo. Recuperado el 20 de junio del 2012. http://www.slideshare.net/yeikel/analisis-de-magnitudes-fisicas.

Ezquerra, A. (2005). Utilización de videos para la realización de medidas experimentales. Alambique, 44, pp: 113-119.

Ezquerra, A. (2010). Estudio del movimiento de una llave de Judo. Madrid. Recuperado el 20 junio del año 2012 de http://es.scribd.com/doc/16492130/F3.

Ezquerra, A., Iturrioz, I., Díaz, M. (2011). Análisis experimental de magnitudes físicas a través de vídeos y su aplicación al aula. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias Universidad de Cádiz*. APAC-Eureka. ISSN: 1697-011X. DOI: 10498/14733 http://hdl.handle.net/10498/14733. http://reuredc.uca.es.

Freudental, H. *Major Problems of Mathematics Education*. Educational Studies in Mathematics, 12(2), 133-150. (1981). doi: 10.1007/BF00305618.

Galilei, G. (1633). Dialogues Concerning Two New Sciences by Galileo Galilei. *Translated from the Italian and Latin into English by Henry Crew and Alfonso de Salvio. With an Introduction by Antonio Favaro (New York: Macmillan, 1914)*. Recuperado el 10 de Septiembre de 2014 de http://oll.libertyfund.org/titles/753.

Hiit, F. & González-Martín, A. (2015). Covariation between variables in a modelling process: The ACODESA (collaborative learning, scientific debate and self-reflection) method. Educational Studies in Mathematics, SPRINGER. Volume 88, Issue 2, pp 201-219. 88:201–219. DOI 10.1007/s10649-014-9578-7

Hitt, F. & Morasse C. (2009). Advanced numerical-algebraic thinking: Constructing the concept of covariation as a prelude of the concept of function. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 7*(1), pp-pp. 2009 (no. 17). ISSN: 1696-2095

Hitt, F. (2007). Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d'une méthode d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'auto-réflexion. In M. Baron, D. Guin et L. Trouche (Éditeurs), *Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage. conception et usages, regards croisés* (pp. 65-88). Éditorial Hermes.

Hitt, F. (2013) ¿Qué tecnología utilizar en el aula de matemáticas y por qué? *Revista Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de la Tecnología en Educación Matemática*, 1(1). 1-11.

Hitt, F., Cortés, J. (2009). Planificación de actividades en un curso sobre la adquisición de competencias en la modelización matemática y uso de calculadora con posibilidades gráficas. *Revista Digital Matemática, Educación e Internet* 10(1). (www.cidse:itcr.ac.cr/revistamate).

Hitt, F., González, M. y Morasse, C. (2008). The Introduction Of The Graphic Representation Of Functions Through The Concept Of Co-Variation And Spontaneous Representations . A Case Study. In Figueras, O., Cortina, J. L., Alatorre, S., Rojano, T., & Sepúlveda, A. (Eds.), (2008). Proceedings of the Joint Meetiing of PME 32 and PME-NA XXX. Vol. 3 México: Cinvestav-UMSNH pp. 3-89, 3-96.

Jofrey, J. A. (2005). Video Analysis. Real-Wordl explotation for secondary mathematicas. *Learning & Leading with Technology*. Vol. 32. Number 6.

Jofrey, J. A. (2010). Investigating the conservation mechanical energy using video analysis: four cases. *Physics Education*. DOI 10.1088/0031-9120/1/005.

Martínez, J., Guevara, C. (1998). *La nueva ciencia*. Servicios Editoriales de La Facultad de Ciencias, UNAM. Ciudad Universitaria, 04510, México, D. F.

Páez R. E. (2004). Procesos de construcción del concepto de límite en un ambiente de aprendizaje cooperativo, debate científico y autorreflexión. Tesis de doctorado no publicada. Cinvestav-IPN, México. http://www.er.uqam.ca/nobel/r21245/

Pantoja, R., Ulloa, R, Nesterova, E.(2013). La modelación Matemática en situaciones cotidianas con software AVIMECA y MATHCAD. Revista Virtual GONDOLA.ISSN 2145-4981 2010.Vol. 8.Num. 1.pp 8-22.

Pask, G. (1975). *Conversation, Cognition and Learning*.North-Holland, Amsterdam: Elsevier Scientific Publishing Company. ISNN:0-444-41193-3.

Passaro V. (2007). Étude expérimentale sur le développement du concept de covariation entre deux grandeurs révélé par une analyse des représentations spontanées d'élèves du premier cycle du secondaire. Mémoire de Maîtrise option didactique des

Resnick, R., Halliday, D. y Krane, K. (2008). Física Volumen 1, 5ta Edición. CECSA: México.

Suarez, L. (2014). Modelación-Graficación para la matemática escolar. Ediciones Díaz de Santos: Madrid España. ISBN:978-84-9969-614-0.

Téllez, A. (2010). *Secuencias didácticas ABP para principios de la dinámica y leyes de Newton en bachillerato*. Tesis de maestría. Instituto Politécnico Nacional, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. México, D. F.