Revista Colombiana de Filosofía de la Ciencia
Vol. 3 • Nos. 6 y 7 • 2002 • Págs. 59-84

El problema didáctico y filosófico de la desaxiomatización de las matemáticas

Luis Carlos Arboleda

Abstract.

Maurice Fréchet is well known for his contribution to the beginnings of Point Set Topology and Functional Analysis. He also wrote several philosophical and didactic essays about the nature and the teaching of mathematical knowledge. One of the thesis he maintained was that when science reaches a high degree of formalization, our mind tries to connect the established mathematical objects with the original non elementary empirical objects. He proposed the term of *desaxiomatisation* to design the movement by which theories already made up return to the world of experience. The issue was to give a satisfactory explanation of the relationship between the logical definition and the empirical one, and to allow the only *undeniable guarantee* for the validity of mathematical propositions.

In this work we examine the function assigned by Fréchet to the desaxiomatisation in the logic of knowledge, and the heuristic and educational value of this conceptual operation. With this aim we analyze the philosophical and epistemological framework of the Fréchet's research program on the Theory of Abstract Spaces. In particular, we are concerned with his views about the relationship between mathematics and concrete world, and his characterization of the mathematical act of reasoning as an *inductive synthetical* one based in the experience. We examine the procedure of desaxiomatisation followed by Fréchet in his choice of the definition of abstract differential, and the discussion between Fréchet and Bourbaki on this subject.

Palabras clave.

Lógica y Razonamiento, Axiomática y Método Deductivo, Historia y Educación Matemática, Diferencial de Fréchet.

Introducción.

El matemático francés Maurice Fréchet (1878-1973) es conocido principalmente por haber contribuido a establecer los fundamentos conceptuales de la topología de conjuntos, la teoría de los espacios abstractos y el análisis funcional. Sin embargo, también desplegó una actividad creadora en una amplia variedad de otros campos como la teoría de probabilidades, la estadística, la geometría y el análisis clásico. Fue uno de los investigadores de su generación que más se interesó en la reflexión sobre la enseñanza, la filosofía y la historia de las matemáticas, como parte de su interés en la problemática de matemáticas y lo concreto. A este género de preocupaciones corresponden sus publicaciones sobre la "desaxiomatización" de las matemáticas que van a ser en estudiadas en este trabajo.

La idea de Fréchet sobre la relación entre matemáticas y experiencia, consiste esencialmente en postular que las matemáticas resultan de una construcción intelectual a través de un proceso de síntesis inductiva, es decir, de esquematizaciones sucesivas originadas en la realidad concreta. En las distintas publicaciones en que desarrolló esta idea[1] , fijó una posición crítica frente a las dificultades de utilizar el método axiomático-deductivo en la investigación y en la enseñanza de las matemáticas. Esta oposición signa prácticamente toda su reflexión filosófica, histórica o educativa sobre las matemáticas. Al tiempo que acepta la función del método axiomático en cuanto a fundamentar la matemática en un número reducido de principios simples, Fréchet subraya la importancia de verificar en la enseñanza y en la investigación el acuerdo entre la definición lógica de un objeto y su representación experimental; a esta función la llamó "desaxiomatización".

En este trabajo se presentarán las concepciones educativas, epistemológicas y filosóficas de Fréchet sobre las matemáticas como actividad de razonamiento sobre un objeto matemático que desarrollan los individuos inmersos en un mundo de experiencias. Se comenzará por explicar la manera en que Fréchet entiende la enseñanza como actividad que comparte con otras, como por ejemplo la historia y la filosofía, la tarea de hacer evidente la heurística de las construcciones axiomáticas. Luego veremos que para Fréchet era posible realizar esta tarea de desaxiomatización incluso en la clase más abstracta y general de razonamientos; en particular en la Teoría de los Espacios Abstractos, dominio privilegiado de sus investigaciones matemáticas de los primeros treinta años del siglo XX del cual emergerían la topología y el análisis funcional.

Pero la desaxiomatización no solamente responde para Fréchet a una función heurística de naturaleza pedagógica, sino también a la necesidad lógica de verificar una teoría general. Valiéndonos de una interesante discusión histórica entre Fréchet y Bourbaki, examinaremos el sentido que uno y otro le dan a las nociones de "aplicación" y "verificación" en la justificación de una teoría matemática, particularmente la teoría de los espacios métricos, uno de los más notables resultados de las primeras investigaciones de Fréchet. Esto nos conducirá, por último, a hacer un estudio crítico de la función lógica que Fréchet le asigna a la desaxiomatización en la constitución del conocimiento matemático (tomando como caso de estudio la diferencial abstracta de Fréchet), y a caracterizar su propuesta filosófica sobre la relación entre matemáticas y experiencia.

La didáctica como explicación de las razones de ser de la axiomática.

Tal vez la primera publicación de Fréchet en donde expresó abiertamente sus concepciones didácticas y filosóficas sobre matemáticas y experiencia, fue en la conferencia de apertura del curso de análisis en la universidad de Estrasburgo, el 17 de noviembre de 1919.[2] Fréchet hizo parte del equipo de profesores a quienes el gobierno les asignó la responsabilidad de organizar los estudios superiores en la provincia de Alsacia, una vez restablecido el control político francés como consecuencia de los repartos territoriales posteriores a la gran guerra.

Su lección inaugural es una pieza preparada a la altura de la responsabilidad de alguien a quien que el gobierno le había confiado una misión académica estratégica en una coyuntura políticamente difícil. Fréchet escoge como personaje de su intervención al matemático alsaciano Louis-François-Antoine Arbogast, destacando para la ocasión algunos rasgos de su biografía intelectual y aportes de su obra matemática. Se centra ante todo en la opinión de Arbogast en el plan general de la instrucción pública adoptado por la Convención nacional, para quien el método de descubrimiento de los saberes es también el método más adecuado para comunicarlos.

Cualquier persona, independientemente de sus capacidades, está en condiciones de comprender el encadenamiento de las ideas utilizado para obtener el objeto inventado. Solo requiere para ello que se le proporcione, de acuerdo con su inteligencia, "el procedimiento para desarrollar todas las ideas intermedias entre lo conocido desde donde se parte y lo desconocido a lo cual se desea llegar"[3]. No se trata de utilizar a toda costa el método histórico, observa Fréchet. Si en el estado actual de la teoría existe un procedimiento más directo para introducir determinado saber, en comparación con el que se utilizó inicialmente, sería inútil hacerle recorrer al alumno el rodeo inicial. Arbogast consideraba que este procedimiento correspondía al método de análisis.

Aparentemente Fréchet se lo representa, al menos desde el punto de vista de la enseñanza, por el siguiente procedimiento: se empieza por exponer en pocas palabras el problema en cuestión; se pasa a ubicar en qué reside su dificultad principal, y luego se le muestra al alumno cómo se supera tal dificultad mediante una serie de aproximaciones sucesivas. Para Fréchet, este método de exposición responde mejor a los propósitos de instrucción pública de la primera república, tal como fueron preconizados por Arbogast:

> "Lo que él desea ante todo, es proscribir el método que presenta la ciencia como una especie de revelación divina, organizada en lemas, teoremas, corolarios, cada uno perfectamente demostrado, pero cuya sucesión se desarrolla de acuerdo a una ley misteriosa e inaccesible".[4]

Por el contrario, cuando el método de exposición comienza por el enunciado de un sistema de axiomas, el estudiante se niega a considerar como simples e intuitivas las nociones introducidas por medio de conceptos, o las leyes introducidas como postulados. Se requiere entonces facilitar al alumno la reconstrucción del trabajo de abstracción adelantado por el autor de la teoría, para que el alumno no le niegue su confianza a la teoría. La enseñanza de la matemática tiene que tener en cuenta que el enunciado axiomático y la parte deductiva de la teoría son el resultado de una obra previa. Esta obra previa constituye el momento de justificación de toda axiomática.

Así pues, si bien este tipo de exposición dogmática resulta cómoda, no corresponde a la realidad de las cosas en la actividad matemática. En su conferencia de las *Entretiens de Zurich*, al referirse al origen de las matemáticas en la experiencia,[1] Fréchet argumenta que no porque en una teoría axiomatizada se imponga la aritmetización, y que las representaciones intuitivas o los referentes al mundo físico estén excluidos de su desarrollo lógico, ello puede llevarnos a afirmar que tal teoría ha sido elaborada exclusivamente por nuestro entendimiento. La aritmética, dice, no podría ser «una ciudadela infranqueable a los ruidos de afuera, en donde reina el espíritu puro».

El número entero no es una creación espontánea de un espíritu lógico apartado de las contingencias. Es, por el contrario, una expresión esquemática de una característica común a varias colecciones. Así como la masa es la característica común a ciertas colecciones de cuerpos diferentes. En fin, el número es «la noción científica fundamental que primero se desprendió de las complicaciones de las negociaciones humanas, no tanto porque era la más simple, sino porque era la más útil ».[2] Esta misma opinión se manifiesta sobre la noción de infinito numerable: Fréchet afirma que la noción de sucesión infinita numerable, no se produce en la mente por la intervención de la intuición pura de la inducción matemática. Es precisamente al contrario. En un primer momento se aceptan en la aritmética las sucesiones infinitas de enteros por las mismas razones que se aceptan las rectas euclidianas: unas y otras son esquematizaciones cómodas de objetos concretos.

El método axiomático-deductivo y la constitución de la teoría de los espacios abstractos.

En una conferencia hecha en Berna en 1925,[3] Fréchet retoma estas consideraciones sobre el tipo de exposición más conveniente en la enseñanza de las matemáticas. Sin desconocer la importancia que el método axiomático-deductivo había entonces alcanzado en la actividad matemática a instancias de la escuela de Hilbert en Göttingen, se propone explicar en su artículo el interés que tendría adelantar paralelamente un programa de *desaxiomatización* en la enseñanza y en la investigación. Aclara que no es adversario de la tendencia cada vez más dominante de fundar la ciencia en el número más pequeño posible de principios simples. Él mismo ha practicado este método con la «mayor perseverancia » en una parte considerable de sus trabajos entre 1904-1925.[4] Su preocupación central en estas investigaciones ha sido separar y extraer de la teoría de los conjuntos lineales (partes de R y R^n), así como de la teoría de las funciones reales, aquellas propiedades que no dependen de la naturaleza de los objetos considerados. Sin que Fréchet utilice de ninguna manera esta terminología, podríamos convenir que la clase formal de estas propiedades o proposiciones matemáticas es precisamente lo que él propuso denominar como Teoría de los Espacios Abstractos.

Con base en esta primera clase, Fréchet edificó otra clase formalmente más compleja de proposiciones y teorías: el Análisis General, uno de cuyos capítulos debía ser precisamente el Análisis Funcional. La intervención del método deductivo consistió, según

Fréchet, en hacer disponible una escogencia adecuada de axiomas para establecer la clase de proposiciones y entidades matemáticas cada vez más generales. Por ejemplo, la axiomática de la métrica y las propiedades topológicas asociadas con esta noción, le permitieron estructurar la teoría de los espacios métricos. Esta teoría a su vez hizo posible el estudio de distintas clases de espacios funcionales (de funciones continuas, funciones analíticas, espacios de curvas, etc.) que a partir de entonces comparten el hecho de tener esa misma estructura. El procedimiento axiomático-formal fue empleado nuevamente por Fréchet para caracterizar la topología del espacio ya no en términos de la métrica, sino de la convergencia de sucesiones numerables o de familias de vecindades, surgiendo entonces de allí clases o teorías más generales de espacios topológicos.[5]

En la "Introducción" a los *Espaces Abstraits*,[6] Fréchet explica el método utilizado para sentar las bases conceptuales del edificio del análisis general. Este consiste en dos fases de naturaleza diferente: a) Determinar un sistema de definiciones que exhiban las propiedades de aquellas nociones adoptadas del análisis clásico en su forma más abstracta posible, y b) Generalizar a partir de allí las proposiciones clásicas fundamentales. La segunda es una "cuestión de orden exclusivamente matemático y lógico". Fréchet sabe naturalmente que la proposición generalizada debe demostrarse en el nuevo cuadro teórico, para que pueda considerarse legítimamente instaurada como objeto matemático en el análisis general. Pero le parece que este requisito se puede obviar y que la demostración "está lista", cuando corresponde a los conceptos y propiedades que constituyen la demostración de la proposición en el cuadro teórico precedente. En estas situaciones basta limitarse a exhibir los conceptos y propiedades de la estrategia demostrativa anterior. El razonamiento opera entonces en la dirección ordinaria (analítica) a partir del sistema de definiciones. (Un ejemplo de esta modalidad, es el argumento de la "prueba" de la compacidad en espacios abstractos que consideraremos en seguida).

Pero en otros casos no es tan evidente que una proposición “que se sospecha” que puede ser generalizada, sea lógicamente aceptada por extensión al nuevo cuadro del esquema demostrativo previo. Entonces el razonamiento procede en sentido inverso (sintético): adaptando las definiciones a ciertas condiciones. Pero en cualquiera de las dos situaciones hay que “escrutar, disecar las demostraciones conocidas para ver en ellas, cuáles son las hipótesis absolutamente indispensables y, en lo posible, colocarlas bajo forma abstracta. A veces habrá que abandonar una demostración que era válida en un caso particular, pero no generalizable, y buscar una enteramente diferente”.

Es fácil reconocer el empleo de este procedimiento desde los propios inicios de la investigación de Fréchet sobre los espacios abstractos. Por ejemplo, su primera publicación sobre los conjuntos abstractos de funciones abstractas en 1904: “Generalización de un teorema de Weierstrass”, la cual fue incluida como *Nota A* en un apéndice de la obra[7]. Inicialmente se define el paquete de nociones de base que Fréchet introduce por la primera vez en las matemáticas: Conjunto abstracto, función u operación funcional (uniforme), continuidad de la función (previa introducción en el espacio de la topología de la convergencia de sucesiones numerables) y conjunto compacto. Obviamente este sistema de definiciones, si bien bastante original, resultó ser muy esquemático y sufrirá por ello sucesivos refinamientos en los años siguientes.

El segundo paso es generalizar a los espacios abstractos la propiedad de Weierstrass para las funciones continuas de valor real. Esta es para Fréchet *«una cuestión de orden exclusivamente matemático y lógico »*. Fréchet no proporciona la demostración del «teorema » en esa corta nota. Se limita entonces a valorar la importancia de su aporte en cuanto a proporcionar un procedimiento para caracterizar la compacidad en términos de la convergencia de sucesiones, mostrar algunas propiedades interesantes de los conjuntos compactos, constatar que la compacidad aplicada a los reales es equivalente a la propiedad de los intervalos de ser partes acotadas y cerradas de *R*, y que esta noción permite resaltar el significado del teorema de Weierstrass en R, R^n y aún en espacios de dimensión infinito numerable. Y concluye así sobre la importancia de su programa de generalización: « Estas proposiciones, cuya apariencia es muy abstracta, comportan numerosas aplicaciones ».

Aplicabilidad y aceptación de una teoría general en la introducción de los espacios métricos.

La noción de “aplicación” o “verificación” de una teoría general es crucial para entender la idea de Fréchet sobre “desaxiomatización”. Con el fin de introducir nuestra interpretación sobre las distintas modalidades que adopta esta noción en las concepciones de Fréchet, vamos a recordar una interesante discusión entre Fréchet y Bourbaki sobre las opiniones que el segundo de ellos mantuvo, al menos en cierta época, en relación con la contribución a la topología general del primero. Nos interesa ante todo lo que tiene que ver con la manera de utilizar las nociones de “aplicación” y “verificación” en la justificación de la teoría de los espacios métricos. En un manuscrito escrito probablemente en 1960,[8] Fréchet manifiesta su insatisfacción por la valoración que explícita o implícitamente había hecho Bourbaki de su contribución a los espacios topológicos.[9] Expresamente dice que cuando en su Tesis de 1906[10] introdujo la noción de distancia o “écart” y estableció las bases de la teoría de los espacios métricos, tuvo el cuidado de *“montrer qu’il ne s’agissait pas d’une généralisation artificielle, en donnant deux exemples simples (et importants en Analyse)”*. Estos ejemplos son el espacio de las funciones holomorfas en el interior de un dominio (capitulo VI), y el espacio de las curvas continuas de Jordan (capítulo VII)[11] . Recordemos las características de la métrica en cada uno de ellos:

a) El primero se refiere a la clase de las funciones complejas f de variable compleja z, definidas en el interior de una región plana fija A y que son holomorfas en A, tales que su frontera consiste en uno o más contornos (contours). Sea $\{A_n\}$ una sucesión de regiones acotadas (Fréchet las llama "aires") tales que cada A_n está contenida en el interior de A_{n+1} y de A, y tal que toda región acotada dada en el interior de A está contenida en el interior de A_n para un n suficientemente grande. La métrica (f, g) de dos funciones f, g de la clase, está definido por:

$$(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{Mn\,(f,g)}{1 + M_n\,(f,g)},$$

en donde $M_n(f,g)$ es el máximo de $|f(z) - g(z)|$ cuando z pertenece a la clausura de A_n.

b) El segundo ejemplo es la clase de las curvas continuas en R^3 definidas no extrictamete como tripletas de funciones reales continuas sobre un intervalo finito cerrado de reales, sino como un conjunto de puntos linealmente ordenados de R^3. El orden resulta de la representación paramétrica de la curva en distintas modalidades. Fréchet define la distancia (C_1, C_2) de dos curvas continuas C_1 y C_2 de la siguiente manera : establece una correspondencia biunívoca y bicontinua entre los puntos respectivos de las curvas, tal que ? es el superior de las distancias. Entonces define la distancia como la cota inferior de los

En la "Introducción" de su Tesis, pp.2-3, Fréchet expone en forma resumida las ideas sobre la "generalización" y el carácter de la "demostración" de las nociones generalizadas, que posteriormente desarrollará en otras publicaciones y que hemos venido hemos comentado en párrafos anteriores. Al mismo tiempo aclara que en el formato de la Tesis, la segunda parte tiene por objeto "aplicar" los resultados generales de la primera parte, a clases de "naturaleza determinada". Se refiere a la dificultad en la escogencia de estos ejemplos, representada en que cada uno de ellos debía *"répondre aux conditions générales nécessaires pour la validité des théorèmes de la première partie"*. Llama la atención del lector sobre las modalidades específicas de la definición de la métrica en los espacios de curvas y funciones holomorfas, que le permitieron superar tal dificultad. Estos son pues, los elementos que están en el transfondo de la referencia que Fréchet hace a los dos ejemplos de espacios métricos en el manuscrito antes mencionado.

Fréchet había reaccionado años atrás ante las notas históricas de los *Eléments de Mathématique* de Bourbaki, no solamente por las apreciaciones que allí se expresan acerca de la importancia de su obra, sino también sobre la propia concepción de la historia de las matemáticas. Con respecto a ésta última, su opinión era la siguiente: [16]

> "allí no se aclara y apenas si se menciona este hecho esencial: que la mayoría de las nociones matemáticas han sido inventadas a partir de problemas particulares que le plantean las otras ciencias o técnicas".

De manera que la discusión era anterior a la aparición de los *Eléments d´histoire des mathématiques*. Fréchet tuvo que haber dirigido una comunicación a Dieudonné seguramente exponiendo estas opiniones, a la cual éste da respuesta el 23 de septiembre de 1950. Dieudonné resume en dos cuestiones la posición que a su manera de ver mantuvo Bourbaki con respecto a la obra de Fréchet. En otro trabajo hemos comentado las opiniones de Dieudonné-Bourbaki sobre las clases (L) de Fréchet o espacios abstractos con la topología de convergencia de sucesiones[2]. Ahora solo nos interesa mencionar el aparte de la carta de Dieudonné que tiene una conexión más estrecha con el tema que estamos discutiendo:

> "(...) tengo que insistir en una de las ideas en las que más creemos: el punto de vista desde donde siempre tratamos de considerar las teorías matemáticas es, por decirlo así, esencialmente pragmático: para mí esto quiere decir que, en la mayoría de los casos, el interés de una teoría se mide para nosotros en la variedad y el alcance de sus aplicaciones a otras partes de la matemática: en particular, la mayor o menor generalidad de una teoría nos interesa infinitamente menos que la manera en que esta se adapta a las aplicaciones".

Independientemente de la opinión de Dieudonné-Bourbaki sobre la contribución de Fréchet a los orígenes de la topología general y el análisis funcional –que, dicho sea de paso, sufriría desde entonces significativas variaciones a los largo de los siguientes cuarenta años, al menos en cuanto a las declaraciones de Dieudonné-, lo que nos parece más importante de señalar es que tal opinión (con sus variaciones y matices posteriores) se sustenta en una idea similar de Fréchet sobre la *aplicabilidad* como criterio rector para la aceptación de una teoría general. Naturalmente si es que la interpretación que hemos venido sosteniendo sobre las concepciones de Fréchet, es correcta.

Función de la desaxiomatización en la lógica del conocimiento.

Ahora creemos estar en mejores condiciones de precisar una de las funciones más interesantes que le asigna Fréchet en su filosofía de las matemáticas a la operación de *desaxiomatización*. Resumamos con este fin la representación que se hace Fréchet del funcionamiento del método axiomático. Este comporta una doble intervención: a) Constituir objetos matemáticos a partir de objetos empíricos; o, en términos de Fréchet, deducir las definiciones de las nociones introducidas por la experiencia, de acuerdo con procedimientos lógicos; y b) Una segunda operación que podría entenderse como la formulación y demostración de proposiciones que, a través de hipótesis convenientes y de ciertas modalidades de razonamiento (observación), afirman propiedades de tales objetos. En palabras de Fréchet esta segunda intervención consistiría en «tratar de probar lógicamente las leyes de observación a partir de hipótesis convenientes» [18] .

Entonces la *desaxiomatización* consiste en ejercitar con las ciencias que han alcanzado un alto grado de axiomatización, un trabajo inverso al que el entendimiento realiza cuando constituye objetos matemáticos a partir de objetos empíricos (no elementales).

Considera que si la tarea principal del científico es contribuir al desarrollo y perfeccionamiento (formal) de la ciencia, no le está prohibido echar una mirada sobre el camino recorrido y tratar de determinar el resultado de los esfuerzos individuales. Incluso con el propósito de controlar los efectos negativos del peso de la tradición y de las modas. Aunque esta perspectiva se aplica corrientemente en la actividad matemática no constituye aún un cuerpo de doctrina. Entonces, Fréchet se dedica en su conferencia de 1925 a precisar y justificar sus ideas sobre la desaxiomatización con algunos ejemplos elementales: la definición de la longitud de una circunferencia, la definición geométrica de la tangente a una curva, y la definición de la diferencial de una función de variable real.

Consideremos el ejemplo de la definición de longitud de la circunferencia. Tratemos de descifrar las concepciones de Fréchet sobre las modalidades de razonamiento que conducirían al sujeto, a través de actos de esquematización de una realidad dada y externa a él, a constituir el objeto al cual se le aplica esa definición. Sin que lo precise así en ninguna parte de la conferencia, Fréchet establece una distinción entre matemáticas como teoría o clase de proposiciones, y como actividad humana de razonamiento con ciertas modalidades y ajustada a ciertos procedimientos lógicos. Supone que el sujeto se enfrenta a un mundo de objetos dados en la realidad sensible y frente a los cuales se ha formado representaciones de cierto tipo, principalmente sobre sus características espacio-temporales. Es en su experiencia con estos objetos que se le plantea al sujeto el problema práctico de determinar la longitud de la placa de hierro con la cual debe calzar una rueda de un carruaje. Este dispone de una serie de conceptos y formas de asignación de conceptos a objetos, que le permiten fijar una «noción experimental » de longitud de la placa. Esta noción es la siguiente: se trata de una placa longitudinal deformable, no elástica, que se aplica exactamente al contorno de la rueda. Este es el primer momento del procedimiento de axiomatización, obviamente como lo entiende Fréchet.

En vano buscaremos en las publicaciones de Fréchet alguna interpretación filosófica sobre la relación sujeto-objeto que permita entender la constitución de esta noción experimental como acto de razonamiento. Observemos esta ausencia de cerca. Supongamos, contra la evidencia, que Fréchet entiende la representación de ese objeto circunferencia aun no conocido, en términos, por ejemplo, de las tesis kantianas sobre la percepción objetiva. Pero este conocimiento elemental (la longitud de la placa que calza bien alrededor de la rueda) sólo sería posible como el primero de una serie de actos de constitución subjetiva *a priori*.[2] Un poco más adelante veremos que Fréchet nunca podría estar de acuerdo con una interpretación como ésta. En realidad lo que piensa Fréchet es que esta noción es «impuesta » al sujeto por la experiencia. En donde la experiencia -instancia indefinible, dato previo a toda conceptualización-, tendría, al mismo tiempo, una especie de capacidad intrínseca de proyectar al sujeto esa noción experimental. Tenemos pues, hasta aquí, dos características de la concepción de Fréchet sobre la experiencia.[3]

La explicación filosófica no está menos ausente en cuanto se refiere al segundo momento del método axiomático. Es decir, el acto del sujeto del cual resulta la «definición lógica », «la que se encuentra en todos los libros de geometría »: la longitud de la circunferencia como límite de la longitud total de un polígono regular convexo inscrito en la circunferencia, cuando la longitud del lado tiende a cero. A diferencia de la definición física (o experimental), la definición geométrica (o lógica) es una combinación (por supuesto lógica) de nociones anteriores. Fréchet no piensa naturalmente esta combinación en términos de juicios que conectan conceptos de objetos, y conceptos de propiedades y relaciones. Menos aún en los distintos actos de exhibición de esos objetos y clases de objetos, y de conexión entre ellos. Ello forzosamente lo habría conducido a pensar en los criterios que el sujeto cognitivo debe movilizar en su conciencia para individualizar los objetos, y producir la definición de la longitud como síntesis de razonamiento. Y, por consiguiente, a tener en cuenta la intervención de la intuición pura que asegura la unidad de la conciencia objetiva en la síntesis. Fréchet escapa nuevamente a la problemática de lo *a priori* recurriendo a su idea de la experiencia como instancia fundadora. El único objetivo de la definición geométrica –de acuerdo con Fréchet-, es permitir la previsión de la evaluación física de la longitud. Ello en razón de que no existe para él garantía lógica de que el número correspondiente a la definición geométrica concuerde con el número que expresa la definición física. La concordancia es únicamente probable (*vraisemblable*). Ella se originaría en:

> «una serie de observaciones experimentales almacenadas inconcientemente en el entendimiento. El geómetra ya sabía que encontraba más o menos la misma longitud cuando aplicaba una cuerda a ruedas ligeramente irregulares pero del mismo diámetro".[4]

Encontramos aquí una tercera idea de la concepción de Fréchet sobre la experiencia: ésta sería la única garantía irrefutable[5] de validez de las proposiciones matemáticas. Por ello es que, en su opinión, se hace necesario el trabajo inverso de retorno a la experiencia para examinar la correspondencia de la definición lógica (geométrica) con la definición experimental. Es decir, se requiere hacer intervenir la categoría de *desaxiomatización*, con su función de verificación directa o indirecta de la consecuencia matemática de una hipótesis física. La verificación de la concordancia entre las dos definiciones es tanto más necesaria en la enseñanza, pues se requiere hacer entender al estudiante que todas nuestras ciencias solo dan un esquema aproximado de la realidad; que una teoría deductiva no puede explicar *por sí misma* el mundo sensible.[6]

En suma, Fréchet considera que existe una doble determinación de las matemáticas por la experiencia. Si los objetos matemáticos de naturaleza cualquiera (la diferencial abstracta o la integral abstracta) poseen un valor intrínseco al pertenecer a una teoría axiomático-deductiva (el análisis general), tales objetos están "determinados por la experiencia" en dos sentidos: por el hecho de su constitución a través de la *síntesis inductiva*, y por la verificación experimental (*desaxiomatización*) a la cual son sometidos en sus aplicaciones teóricas y prácticas. Entonces existe una correspondencia entre ambas operaciones, y se hace necesario disponer de un dispositivo concreto para descifrar esta relación de doble vía. Algo así como un "vocabulario para traducir la teoría en experiencias"; una correspondencia entre las nociones abstractas de la teoría y determinadas realidades. Ahora bien, el vocabulario que hace posible la desaxiomatización, se descifra en la operación de sintesis sobre la cual reposa la axiomatización. Él se nos hace evidente en la explicación de la síntesis inductiva; es decir, cuando nos proponemos entender las razones de ser del sistema de axiomas adoptado y de las condiciones que hacen plausible la teoría.

Conviene mencionar que la expresión "vocabulario para la traducción de teorías en experiencias" es adoptada por Fréchet del probabilista William Feller, [7] para quien en el estudio de la relación de doble vía entre matemáticas y experiencia era necesario distinguir con precisión al menos dos problemas: a) Toda teoría matemática puramente formal -es decir aquella cuya forma de operar solo es posible a partir de un sistema de axiomas-, tiene por objeto construir una imagen tan isomorfa como sea posible de una clase de fenómenos exteriores. De ahí el segundo problema: b) Hacer explícita una especie de vocabulario para la traducción de teorías en experiencias y, a partir de allí, hacer posibles las aplicaciones. En un comentario escrito al margen de una de las versiones de su conferencia en las *Entretiens*[8] , Fréchet precisa los términos en que adopta esta noción de vocabulario y trata de deslindar campos con otras concepciones entonces en boga. (Posiblemente concepciones sobre la existencia de un isomorfismo universal entre sistemas materiales y sistemas implicativos de significación, o sobre la imposibilidad de que la lógica de primer orden pudiera caracterizar, «à isomorphisme près», una estructura infinita dada). Fréchet aclara entonces que «Feller no dice a este respecto que tal vocabulario se establezca de una vez para siempre. Sin embargo, se trata: de una correspondencia, de una parte, entre realidades concretas; de conceptos abstractos que son, de otra parte, su esquematización, y (del hecho) que estos últimos evolucionan con la evolución de las teorías científicas. El vocabulario de Féller es entonces relativo a una teoría determinada y no puede representar una correspondencia inmutable».

Desaxiomatización y escogencia de la definición necesaria de un objeto matemático: el caso de la diferencial de Fréchet.

Pero en donde mejor nos parece que se hace evidente la concepción de Fréchet sobre la dialéctica síntesis-axiomatización-formalización-desaxiomatización, es el estudio de la introducción de su teoría de la diferencial abstracta, una de sus contribuciones más originales al análisis. En su conferencia de 1925 Fréchet se refiere a las dificultades que se le encontraron progresivamente a la definición original de diferencial desde la época de Newton y Leibniz, para cuya superación se propusieron distintas axiomáticas. Menciona una en particular que va a permitirle conectar con su propia definición: al representarnos la diferencial como la parte principal del incremento se presentan dificultades cuando la primera derivada es nula. Entonces se optó por redefinir la diferencial como el producto de la derivada por el incremento de la variable. Pero inmediatamente se observa que el propósito de rigor conceptual que justifica la intervención de tales procedimientos axiomáticos, tiene como efecto que se haga menos intuitiva la definición experimental:

> "(...) el resultado ha sido obtenido al sustituir una noción clara e inmediatamente utilizable, una definición que no da cabida a ninguna intervención de la imaginación y que se apoya sobre la noción de derivada, más difícil de concebir (...). Se puede (entonces) retomar las ventajas de la primera definición si se caracteriza la diferencial de una función como la función más simple del incremento de la función".

Este fue precisamente el criterio adoptado para determinar la propiedad característica de la diferencial en los espacios abstractos. Fréchet recalcó en distintas publicaciones que desde el comienzo (1911-1912 y 1914) se orientó a generalizar aquel principio 'útil y necesario' que originó la noción de diferencial en el cálculo infinitesimal; esto es, que la diferencial dF es la función más *simple* con respecto a la variación Δx de la variable, y más *aproximada* a la variación ΔF de la función.

En otra parte hemos tratado de reestablecer el proceso de esquematizaciones con procedencias y órdenes distintos, que confluyeron en la generalización de la diferencial de Fréchet[1]. Bástenos aquí reconocer una de las filiaciones más decisivas de esta generalización en sus publicaciones seminales de antes de la guerra. Consistió en apoyarse en una clase de definiciones previas de la diferencial total de una función de varias variables (Stolz, Pierpont, Young). Fréchet incorpora un nuevo elemento teórico (la forma lineal) en la definición de la diferencial de una función *f(x, y)*, al hacer depender la diferencial de la existencia de una función homogénea y de primer grado con relación a los crecimientos Δx, Δy. Se dice que la función *f(x, y)* tiene una diferencial en *(x, y)*, si existe una función lineal homogénea $A\,\Delta x + B\,\Delta y$, tal que:

$$\frac{1}{\Delta}\big(f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) - A\Delta x - B\Delta y\big) = \varepsilon$$

donde $\varepsilon \to 0$, cuando $\Delta \to 0$. La función lineal homogénea $A\,\Delta x + B\,\Delta y$ es la *diferencial* de *f*.

A partir de este punto, Fréchet incorpora al proceso de esquematizaciones anteriores otra clase de consideraciones (Volterra, Hadamard), para llegar a la definición de la diferencial de una funcional *F(f)* :

F(f) es *diferenciable* en *f* si existen ε y una funcional $\delta F(f; g)$, lineal en relación a *g*, tales que:

$$F(f+g) - F(f) - d(f;g) = \varepsilon M(g)$$

en donde, $M(g) = max\left|g(x)\right|$ en $[a, b]$ y $\varepsilon \to 0$, cuando $M(g) \to 0$. En su conferencia de 1925 sobre la desaxiomatización Fréchet escribe que cuando se *aplica* esta definición a la clase de funciones de varias variables, se llega al siguiente resultado: *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction f(x, y) ait une différentielle totale exacte est que la surface représentative z = f(x, y) ait un plan tangent (non parallèle à OZ) au point correspondant.* Agrega a continuación que es admirable que durante varios lustros hayan prevalecido otras definiciones de la diferencial -distintas a la clase de la definición clásica a la cual pertenece la suya-, que no satisfacen un teorema tan fundamental. Un comentario similar aparece en un artículo de 1914 donde Fréchet publicó el anterior resultado. Sin embargo, en ese entonces agrega una idea que once años después podría haber reforzado su argumentación sobre la necesidad de operar la desaxiomatización en aquellas teorías que han alcanzado un nivel avanzado de expresión formal. La idea de Fréchet es que, precisamente, esta aplicación geométrica de la diferencial abstracta, muestra que la escogencia de su definición « no aparece solamente como una escogencia afortunada, sino también, si se me permite, *como una escogencia necesaria* »[1] .

La importancia epistemológica que Fréchet siempre le concedió a esta modalidad de verificación de una teoría tan general como la diferencial abstracta, se puede constatar en una publicación que al final de su vida le consagró al análisis comparativo de distintas definiciones de este objeto matemático. En conexión con este asunto nos interesa distinguir las siguientes ideas en la concepción de Fréchet sobre las diferentes verificaciones : a) El proceso empleado por Fréchet para introducir la diferencial abstracta es distinto a la manera habitual de pasar de lo particular a lo general ; b) La modalidad de verificación que él empleó –volver del caso general de los espacios abstractos al caso particular del plano- tenía un valor decisivo en la afirmación de la definición de la diferencial ; c) una segunda modalidad de verificación empleada por Fréchet, consistió en aplicarle las propiedades de la diferencial de una funcional a la tranformación definida en una clase de espacios abstractos (particularmente en los muy útiles y fecundos espacios de Banach) ; por último, d) las sucesivas esquematizaciones que dieron lugar a la diferencial de Fréchet, constituyen una modalidad de generalización *característica* de este *nuevo* objeto matemático, y no solamente pueden ser pensadas como el recorrido de una sucesión estándar de pasos que conducen a tal objeto, como generalización de la clase de objetos (diferencial clásica) desde donde se originó el proceso de esquematizaciones.

Creo no haberme equivocado al interpretar que las ideas anteriores hacen parte de la concepción que Fréchet expresa en la siguiente citación[2] :

«Fue por una vía totalmente diferente que llegamos a una definición equivalente y muy análoga [que pertenecía a la clase de Stolz, Pierpont,Young, Fréchet], pero de una forma distinta, *más adecuada a la generalización de las funciones abstractas*. En efecto, contrariamente al proceso habitual que consiste en pasar de lo particular a lo general, nosotros obtuvimos la siguiente definición *volviendo del caso general* de los espacios abstractos *al caso particular* del plano. Ello se debe a que, al comienzo, estabamos acostumbrados a las definiciones usuales de la época, pero el objetivo de nuestro estudio eran las funciones abstractas. Al definir la diferencial en primer lugar de una funcional [Fréchet, 1912], y luego de una transformación de un espación abstracto en un espacio abstracto, pudimos probar, en el caso de una relación entre dos espacios de Banach [Fréchet, 1925] que esta diferencial conservaba las propiedades principales de la diferencial de una función numérica de una variable numérica. Fue solamente *enseguida* (ya que en esta época nuestro propósito principal era estudiar los espacios abstractos) que nos preguntamos si esta definición era exactamente una generalización completa de la diferencial clásica. Y nos dimos cuenta que ello no era así y que obteníamos la siguiente definición más estricta...” [Fréchet se refiere a la expresión de la diferencial de f(x, y) antes expuesta].

Anotemos por último, que la generalización de la diferencial de 1925 se refiere a una clase de espacios que Fréchet había introducido años atrás y que se habían revelado extremamente importantes en distintas teorías: los ‘espacios distanciados vectoriales’ o espacios normados lineales: Sean E_1 , E_2 espacios normados lineales. Si $M = f(m)$ es una transformación del punto m de E_1 en el punto M de E_2, y si m_o es un punto interior del conjunto, donde está definido $F(m)$, se dice que la transformación es diferenciable en m_0 si existe una transformación lineal Ψ de E_1 en E_2 tal que:

$$F(m_o + \Delta m) - F(m) - \Psi\Delta(m) = \varepsilon \left|\Delta m\right| U,$$

donde U es un vector unitario variable en E_2 y $\varepsilon \to 0$, cuando $\left|\Delta m\right|$ $\to 0$.

Notas.

[1] Las publicaciones más importantes de Fréchet en relación con este tema se encuentran recopiladas en: Fréchet, M.(1955) : *Les Mathématiques et le concret.* Paris, P.U.F. El presente trabajo hace parte de un estudio más completo sobre ésta y otras cuestiones conexas: Arboleda, L.C. y L.C. Recalde(1999): *Matemáticas y experiencia: La generalización de la noción de espacio abstracto en Maurice Fréchet*. Proyecto 1106-05-313-95, Universidad del Valle-Colciencias. Cali, Colombia.

[2] Fréchet, M. (1920) : « Les mathématiques à l'université de Strasbourg ». *La Revue du Mois*, 21, pp.337-362. Reproducido casi integralmente en : Fréchet (1955); pp.368-388, bajo el título « Biographie du mathématicien Alsacien Arbogast».

[3] Citado en Fréchet (1955): *Mathématiques et le concret*. Paris, P.U.F. ; p.383.

[4] Fréchet (1955), *op. cit.*, p.383.

[5] Las *Entretiens de Zurich* tuvieron lugar del 6 al 9 de diciembre de 1938, por iniciativa de Ferdinanth Gonseth, en la École Polytechnique Fédérale de Zurich. Contó con la participación de mátemáticos, lógicos y filósofos, entre quienes se encontraban, Gonseth, Skolem, Fréchet, Lukasiewicz, Lebesgue, Polya, Sierpinski y Bernays. La memoria de la reunión fue editada por Gonseth y publicada tres años después. La exposición de Fréchet a la cual nos referimos en este trabajo es : Fréchet, M. (1941) : « L'Analyse générale et la question des fondements », IN : Gonseth, F.(1941) : *Les Entretiens de Zurich sur les fondements et la méthode des sciences mathématiques*. Zurich, Leemann; pp. 53-81. Fréchet sólo publicará el texto completo de su conferencia quince años después con un título que resalta más el carácter filosófico de sus ideas sobre la cuestión: "Les origines des notions mathématiques". IN: Fréchet, M (1955); pp. 11-51.

[6] Fréchet (1955), p.18.

[7] Fréchet, M.(1925) : « Sur une désaxiomatisation de la science », conferencia publicada por primera vez en Fréchet (1955), pp. 1-10.

[8] Ver el estudio que le hemos consagrado a este problema en: Arboleda, L.C. y L.C. Recalde (1999): "Fréchet and the logic of the constitution of abstract spaces from concrete reality". *Synthese. An International Journal for Epistemology, Methodology and Philosophy of Science*. (En prensa). Fréchet fija sus concepciones sobre su contribución de este período en la « Introducción» a su obra : Fréchet, M.(1928): *Les Espaces Abstraits et leur théorie considérée comme Introduction à l'Analyse Générale*. Paris, Gauthier-Villars. Esta "Introducción" se basa, entre otras

publicaciones, en: Fréchet, M.(1925) : « L'Analyse générale et les Ensembles abstraits». *Revue de Métaphysique et de Morale,* vol. 32, pp.1-30. Consultar también sobre este mismo periodo la trilogía que Agnus E. Taylor publicó en los *Archive for History of Exact Sciences,* bajo el título genérico "A Study of Maurice Fréchet"; ver Taylor (1982), Taylor (1985) y Taylor (1987). Igualmente: Arboleda, L.C. (1980) : *Contribution à l'étude des premières recherches topologiques (d'après la correspondance et les publications de Maurice Fréchet, 1904-1928)*. Thèse. Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales. Paris.

[9] Fréchet (1955), *op.cit.*, p.2.

[10] Ver el parágrafo « Les Méthodes de l'Analyse générale » en : Fréchet (1928) ; pp. 15-16.

[11] Fréchet (1928) ; pp.275-276.

[12] Este manuscrito tiene como titulo « Compléments à l'histoire des mathématiques, par Maurice Fréchet ». Hace parte, junto con otros documentos relacionados, del dossier F 1.7, « N. Bourbaki. Correspondance et documents au sujet des *Eléments d'Histoire des mathématiques* », carton (F1), *Fonds Fréchet*, conservado en los Archives de la Académie des Sciences, Paris. Este trabajo de clasificación de los papeles de Fréchet fue adelantado por mi durante el período de 1976-1980 en el cual preparé mi tesis doctoral (Arboleda, 1980). El manuscrito no tiene fecha ni destinatario, pero parece ser el borrador de una circular dirigida por Fréchet a varios matemáticos con relación al diferendo representado por la publicación: Bourbaki, N. (1960) : *Eléments d'Histoire des mathématiques*. Paris, Hermann. En el dossier « Bourbaki » también se encuentra la carta enviada por Dieudonné a Fréchet el 27 de septiembre de 1950, a la cual nos referimos adelante.

[13] Bourbaki, N. (1960).

[14] Fréchet, M. (1906) : « Sur quelques points du calcul fonctionnel ». *Rendiconti del Circulo matematico di Palermo*, vol. 13, pp.1-74.

[15] Ver la discusión de la estructura métrica de estos espacios en Taylor I.

[16] Ver el manuscrito de Fréchet referido en la nota 12.

[17] Arboleda, L.C.(1982) : "Consideraciones metodológicas sobre el aporte de M. Fréchet à la topología générale". *Actes du VI Congrès du groupement des mathématiciens d'expression latine,* Gauthier-Villars, Paris. Una exhaustiva discusión sobre el significado e impacto de la Tesis de Fréchet en la historia de la topología, se encuentra en Taylor I. Incluído un estudio sobre la evolución de las opi-

niones al respecto de Dieudonné-Bourbaki, y la valoración de Taylor sobre las reacciones de Fréchet.

[18] Fréchet (1955), *op.cit.*, p.3. En Arboleda-Recalde (1999) se da una explicación sobre el marco conceptual de referencia desde donde se hace pertinente el análisis de la « filosofía espotánea » de Fréchet sobre la naturaleza y funciones de la actividad de razonamiento matemático.

[19] Como lo reconocemos en nuestro trabajo Arboleda-Recalde (1999), en este estudio de las concepciones de Fréchet nos hemos beneficiado de las explicaciones que Marco Panza nos ha dado, personalmente y por escrito, de las tesis de Kant sobre las matemáticas. Principalmente nos ha sido útil su lectura de la *Introducción* a la *Crítica de la razón pura*, en : Panza (1997a).

[20] En un interesante estudio de la filosofía de Ferdinand Gonseth, Panza critica su uso frecuente de la noción de experiencia como estadio primero de la relación del hombre con el mundo y tribunal de la razón, sin ir más allá a la formulación de hipótesis filosóficas sobre las formas de la relación y la sanción implicadas en estas afirmaciones. ≤Entonces, en tanto que experiencia «manifiesta», toda «experiencia» necesita un estadio que le es previo y que plantea problema (el problema gnoseológico por excelencia)≤. Panza, M. (1992a) : « Gonseth et les prolégomènes d'une logique de la connaissance » . En : Panza, M. y J.–C . Pont (1992) : *Espace et horizons de réalité*. Masson, Paris; pp . 23-45.

[21] Fréchet (1955) ; p.4.

[22] Conviene mencionar a este respecto la opinión de Panza al final de su trabajo Panza (1997a) ; p.323 : « Entonces la tarea de una filosofía de las matemáticas es, para mi, proporcionar poderosas categorías que permitan caracterizar y entender las matemáticas como una actividad humana típica, y no fundar o legitimar sobre una garantía irrefutable –aunque entender una teoría matemática es también volvera sus orígenes y aclarar (y eventualmente discutir) sus razones ».

[23] Fréchet (1955) ; p.16.

[24] Feller, W. : « Sur les axiomatiques du calcul des probabilités et leur relations avec les expériences », IN : *Les fondements du calcul des probabilités*, Paris, Hermann, 1938 ; pp. 7-21.

[25] Existen varias copias con anotaciones del manuscrito de la conferencia con el titulo «Rapport aux Entretiens de Zurich». *Fonds Fréchet*, Archives de l'Académie des Sciences, Paris; carton 7, p.19.

[26] Recalde, L.C. et L.C. Arboleda (1999): «Fréchet and the generalization of mathematical concepts: The differential case». Manuscrito. Ver sobre esta misma cuestión: Taylor III; Arboleda, L.C. et L.C. Recalde(1998): "Las concepciones socioepistemológicas de Fréchet en sus investigaciones sobre la teoría de los espacios abstractos y la topología general". IN: Alsina, C. (et al.)(1998): *8th International Congress on Mathematical Education. Selected Lectures.* (ICME-8, Sevilla, Julio de 1996). Sevilla, SAEM Thales; pp. 1-13. Versión corregida y aumentada en: Arboleda, L.C. et L.C. (1998): "Las concepciones sobre matemáticas y experiencia en Maurice Fréchet". *Matemáticas: Enseñanza Universitaria*, Cali, vol. 6, n° 1-2, pp. 79-94.

[27] El subrayado aparece en el original: Fréchet, M.(1915): « Sur la notion de différentielle totale ». *Comptes rendus du congrès des sociétés savantes*. Paris; pp. 29-32.

[28] Los subrayados se encuentran en el original: Fréchet, M.(1964): «Sur diverses définitions de la différentiabilité». *Enseignement mathématique*, vol.10; pp.177-228. Otra interpretación de esta misma citación se encuentra en Taylor III, pp.46-47.

BIBLIOGRAFÍA

Arboleda, L.C. (1980): *Contribution à l'étude des premières recherches topologiques (d'après la correspondance et les publications de Maurice Fréchet, 1904-1928).* Thèse. Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales. Paris.

Arboleda, L.C.(1982): "Consideraciones metodológicas sobre el aporte de M. Fréchet à la topología générale". *Actes du VI Congrès du groupement des mathématiciens d'expression latine*, Gauthier-Villars, Paris.

Arboleda, L.C. et L.C. Recalde (1998): "Las concepciones socioepistemológicas de Fréchet en sus investigaciones sobre la teoría de los espacios abstractos y la topología general". En: Alsina, C. (et al.)(1998): *8th International Congress on Mathematical Education. Selected Lectures.* (ICME-8, Sevilla, Julio de 1996). Sevilla, SAEM Thales; pp. 1-13. Versión corregida y aumentada en: Arboleda, L.C. et L.C. (1998).

Arboleda, L.C. et L.C. Recalde (1998): "Las concepciones sobre matemáticas y experiencia en Maurice Fréchet". *Matemáticas: Enseñanza Universitaria*, Cali, vol. 6, n° 1-2, pp. 79-94.

Arboleda, L.C. y L.C. Recalde (1999): *Matemáticas y experiencia: La generalización de la noción de espacio abstracto en Maurice Fréchet.* Proyecto 1106-05-313-95, Universidad del Valle-Colciencias. Cali, Colombia.

Arboleda, L.C. y L.C. Recalde (1999): "Fréchet and the logic of the constitution of abstract spaces from concrete reality". *Synthese. An International Journal for Epistemology, Methodology and Philosophy of Science.* (En prensa).

Bourbaki, N. (1960): *Eléments d'Histoire des mathématiques*. Paris, Hermann.

Fréchet, M.(1955): *Les Mathématiques et le concret.* Paris, P.U.F..

Fréchet, M. (1920): «Les mathématiques à l'université de Strasbourg». *La Revue du Mois*, 21, pp.337-362.

Fréchet, M. (1941): «L'Analyse générale et la question des fondements». En: Gonseth, F. (1941); pp. 53-81.

Gonseth, F. (1941): Les Entretiens de Zurich sur les fondements et la méthode des sciences mathématiques. Zurich, Leemann.

Feller, W: «Sur les axiomatiques du calcul des probabilités et leur relations avec les expériences », En *Les fondements du calcul des probabilités*, Paris, Hermann, 1938 .

Fréchet, M. (1906): «Sur quelques points du calcul fonctionnel». Rendiconti del Circulo matematico di Palermo, vol. 13, pp.1-74.

Fréchet, M. (1912): «Sur la notion de différentielle dans le Calcul fonctionnel». *Comptes rendus du congrès des sociétés savantes*. Paris; pp. 45-59.

Fréchet, M. (1915): «Sur la notion de différentielle totale». *Comptes rendus du congrès des sociétés savantes*. Paris; pp. 29-32.

Fréchet, M. (1925): «L'Analyse générale et les Ensembles abstraits». *Revue de Métaphysique et de Morale*, vol. 32, pp.1-30.

Fréchet, M. (1925): «Sur une désaxiomatisation de la science ». En : Fréchet (1955) ; pp. 1-10.

Fréchet, M. (1925): "La notion de différentielle dans l'analyse générale". *Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, vol. 42; pp. 293-323.

Fréchet, M. (1928): *Les Espaces Abstraits et leur théorie considérée comme Introduction à l'Analyse Générale*. Paris, Gauthier-Villars.

Fréchet M. (1955): *Mathématiques et le concret*. Paris, P.U.F.

Fréchet, M. (1964) «Sur diverses définitions de la différentiabilité ». *Enseignement mathématique,* vol.10 ; pp.177-228.

Otte, M. and M. Panza (ed.)(1997): *Analysis and Synthesis in Mathematics. History and Philosophy*. Kluwer, Dordrecht.

Otte and Panza (1997a): «Mathematics as an Activity and the Analytic-Synthetic Distintion ». En : Otte and Panza (1997); pp. 261-271.

Panza, M. y J.-C. Pont (ed) (1992): *Les savants et l'Épistémologie vers la fin du XIX*e *siècle.* Paris, Blanchard.

Panza, M. (1992a): «Gonseth et les prolégomènes d'une logique de la connaissance ». En : Panza, M. y J.-C. Pont (1992); pp. 23-45.

Recalde, L.C. et L.C. Arboleda (1999): «Fréchet and the generalization of mathematical concepts: The differential case». Manuscrito.

Taylor, A. E. (1982): «A study of Maurice Fréchet I: His early works on point set theory and the theory of functionales». *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 27; pp. 233 - 295.

Taylor, A. E. (1985): «A study of Maurice Fréchet II: Mainly about his work on general topology, 1909-1928». *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 34; pp. 279 - 380

Taylor, A. E. (1987): «A study of Maurice Fréchet III: Fréchet as Analyst, 1909-1930». *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 37; pp. 25 – 76.