

# COMPRENDER LOS RESULTADOS DE INVESTIGACIÓN: EL ROL DOCENTE DEL INVESTIGADOR EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA EDUCATIVA<sup>1</sup>

Cristina Ochoviet  
Instituto de Profesores Artigas, Uruguay.  
cristinaochoviet@gmail.com

Asuman Oktac  
CINVESTAV-IPN, México.  
oktac@cinvestav.mx

## RESUMEN

En este ensayo reflexionamos sobre el rol docente del investigador concebido como aquel que puede contribuir a la comprensión de los resultados de investigación de la Matemática Educativa que él mismo ha generado en su labor profesional. Este rol docente puede ejercerse en ámbitos de formación continua para docentes en ejercicio o en el marco de eventos académicos. Para llevar adelante la tarea docente se hace necesario pensar la enseñanza en estos ámbitos. Presentamos algunos aportes relativos a la conducción del proceso de enseñanza y al diseño de las actividades.

**Palabras clave:** formación de profesores, conexión teoría-práctica, rol docente del investigador, enseñanza de la matemática educativa, diseño de actividades

## ABSTRACT

In this paper we reflect on the teaching role of the researcher conceived as one that can contribute to the understanding of the research results in mathematics education that has been generated through his professional development. This role can be developed in areas of continuing education for inservice teachers or as part of academic events. To carry out the task of teaching we must think about the appropriate learning environment. We present some contributions related to the management of the teaching process and the design of activities.

## 1. INTRODUCCIÓN

Si al igual que la NCTM (1991) asumimos que la educación de los profesores de matemática es un proceso permanente y que este proceso puede entenderse como un estado constante de “convertirse en” profesor, entonces cobra especial importancia el proceso de formación continua de los profesores y la forma en que este se desarrolla. Las organizaciones profesionales juegan en este sentido un rol relevante en lo que refiere a la organización de encuentros, congresos, talleres, cursos, entre otras actividades, cuyo objetivo es aportar a la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática a través del desarrollo profesional de los integrantes de las distintas comunidades educativas. Un ejemplo de esto lo constituye la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME), encuentro anual al que asisten docentes e investigadores de diversos países y constituye un punto de encuentro para la comunicación y difusión de los saberes del campo disciplinar de la Matemática Educativa. Específicamente, en su objetivo general, extraído del sitio institucional, se declara que:

---

<sup>1</sup> Ochoviet, C. y Oktac, A. (2011). Comprender los resultados de investigación: labor docente del investigador en la enseñanza de la matemática educativa. En Buendía Ábalos, G. (Coord.), *Reflexión e Investigación en Matemática Educativa*. México: Editorial Lectorum, 53-80.

El propósito de RELME es hacer que todos los asistentes, en exhaustivas sesiones, intercambien sus experiencias, comuniquen sus ideas y presenten sus resultados rigurosamente, con la intención deliberada de consolidar la disciplina: matemática educativa, con el ánimo de favorecer el aprendizaje de las matemáticas en los diferentes niveles de los sistemas educativos de Latinoamérica bajo la premisa de conservar la pluralidad de los acercamientos existentes y el respeto a las tradiciones educativas propias de cada uno de los países miembros. (Sección de Propósitos y Objetivos, Párr. 1)<sup>2</sup>

En este enunciado se hace explícito el objetivo de *comunicar y presentar resultados con rigurosidad*. Si bien muchos sostienen que la comunicación de resultados constituye la fase final de un proceso investigativo otros consideran que la última fase la constituye la publicación de los resultados y otros van aún más lejos planteando que la investigación termina cuando el lector entiende el artículo: “[...] es decir, que no bastaría con publicarlo, sino que sería necesario además que la audiencia comprendiese su contenido” (Cantoral, 2007, 312).

La necesidad de comprender cobra especial importancia tanto si pensamos en profesores en ejercicio (que no necesariamente son investigadores o participan en proyectos de esta naturaleza) como en investigadores. En el caso de los primeros porque el conocimiento emergente de la investigación constituye conocimiento didáctico del contenido que es uno de los conocimientos base para la enseñanza (Shulman, 2005) y para los segundos porque la comprensión de los resultados potencia, por ejemplo, las posibilidades de discusión de los mismos por parte de integrantes de la comunidad.

Diversos trabajos reseñan la importancia de la participación de los profesores en programas de desarrollo profesional porque los ayudan a ampliar sus conocimientos de contenido, de conocimiento didáctico del contenido y a mejorar sus prácticas de aula (Borko, 2004; Tsamir, 2008; Even, 1999). Estos trabajos consideran diferentes herramientas para el trabajo con los profesores, como por ejemplo, la resolución de problemas matemáticos, el análisis y reflexión sobre las prácticas de aula y, el que deseamos destacar en este trabajo, que es el estudio de los aportes teóricos provenientes de la Matemática Educativa, en tanto permiten generar una relación dialéctica entre los aportes provenientes de la investigación, el conocimiento del profesor y su práctica en el aula.

Si nos proponemos favorecer la *comprensión* de los resultados de investigación, deberíamos sumar instancias en las que además de *comunicar* estos resultados, nos ocupáramos de su enseñanza, a través de actividades especialmente diseñadas para este fin. Lo que estamos proponiendo es entonces que el investigador en Matemática Educativa asuma en los ámbitos de desarrollo profesional de los educadores, el rol docente. Asumir este rol implica, entre múltiples aspectos, la responsabilidad de diseñar los ambientes de aprendizaje que permitan a los profesores participantes de instancias de actualización, la comprensión de las problemáticas en que se ha focalizado la investigación. Nos ocuparemos en este ensayo de reflexionar sobre estos diseños con el objetivo de pensar acerca de la enseñanza de los resultados de investigación provenientes del campo y por tanto de la enseñanza de la Matemática Educativa.

Como estamos proponiendo instancias de desarrollo profesional en las que el rol docente es asumido por el investigador que ha producido un determinado saber, conviene que precisemos cómo concebimos esta figura, en tanto el no hacerlo podría dar a entender que estamos proponiendo estructuras verticales de “transmisión” del conocimiento.

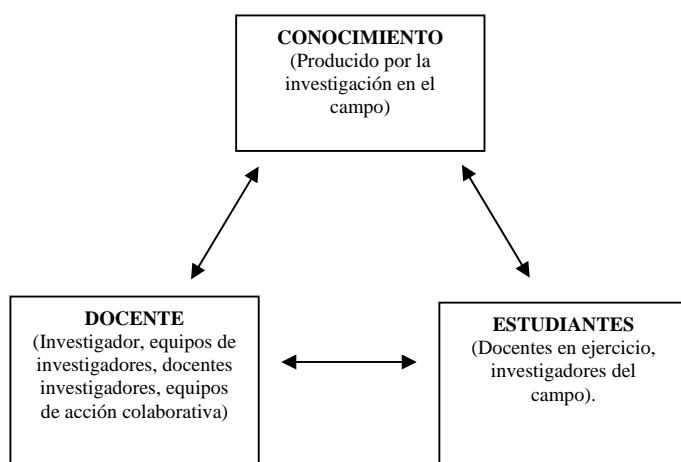
La orientación actual de buena parte de la investigación en Matemática Educativa no ha resuelto totalmente cómo conectar los resultados de investigación con acciones concretas que permitan mejorar la práctica educativa. Las implicaciones didácticas de los *papers*, muchas veces quedan en eso, en implicaciones que no logran concretarse en la práctica, ya sea porque los docentes no tienen acceso a ellas, porque se hace difícil la transferencia a la práctica o porque los investigadores no se abocan a la producción de material con fines de enseñanza, entre otros asuntos. Una alternativa posible consiste en

<sup>2</sup> Recuperado en <http://relme-clame.org/relme/propositos/> (21/06/2011)

desarrollar proyectos de trabajo que reúnan a investigadores y docentes en acciones colaborativas que permitan a ambas partes nutrirse mutuamente dentro de los saberes que cada uno ha construido sobre su práctica: práctica docente y práctica de la investigación (Ochoviet y Oktaç, 2010).

Ante el desafío de estrechar lazos entre la investigación y la práctica, numerosos trabajos desarrollan metodologías de investigación en las que investigadores y docentes trabajan en forma colaborativa (Czarnocha y Prabhu, 2005; Moschkovich y Brenner, 2000; Raymond y Leinenbach, 2000; Desgagné, Bednarz, Lebuis, Poirier y Couture, 2001; Ochoviet, 2009). No obstante, un importante número de docentes en ejercicio no desarrolla ni participa en trabajos de investigación como es el caso de los docentes uruguayos donde el desarrollo de la investigación en Matemática Educativa se encuentra aún en estado incipiente (Ochoviet, 2007). Por otra parte, Sierpinska y Kilpatrick (1998) reportan que existen opiniones encontradas en cuanto a si los docentes pueden investigar y en qué marco lo harían. Mencionan que mientras que algunos consideran a la docencia como una situación privilegiada para investigar aspectos de la enseñanza, otros critican la investigación acción o el concepto de docente investigador por entender que para poder estudiar y analizar un fenómeno, el investigador debe separarse del acto de enseñar.

Es así que cuando hablamos del rol docente del investigador nos estaremos refiriendo a un rol a ser asumido por parte de todos aquellos que han llevado adelante un proceso de investigación ya sea en primera persona o *desde adentro* como la llama Ball (2000), una investigación que utiliza al investigador como observador externo o trabajando en forma colaborativa con docentes, o aquellas de carácter más teórico. Entendemos así que el saber producido por un investigador o por un equipo de investigadores y docentes, puede ser de interés tanto para otros investigadores como para docentes en ejercicio que no desarrollan investigación. El conocido triángulo didáctico se configura, para nuestra reflexión, de la siguiente manera:



En este trabajo realizaremos una propuesta para el desarrollo de la función docente del investigador en espacios de formación continua o de actualización como pueden ser las sesiones de cursos o talleres en el marco de congresos o reuniones de matemáticos educativos. El objetivo consiste en favorecer la comprensión de los resultados de investigación. Para ello nos centraremos principalmente en aspectos metodológicos para la gestión de la sesión y en el diseño de las actividades de enseñanza a utilizar.

## 2. ALGUNOS DESAFÍOS DE LA FORMACIÓN CONTINUA DE DOCENTES EN EJERCICIO

Ball y Even (2008) plantean como desafío para la comunidad internacional identificar el desarrollo de quienes se ocupan del desarrollo profesional de los docentes. Señalan que es diverso el perfil de quienes se ocupan de la formación de los docentes, existen pocas normas para definir las

características deseables y muchos de ellos tienen poca preparación para la tarea que desempeñan. En relación a esto, los autores señalan que existe un problema de difusión conceptual. Observan que no se ha dicho una palabra o frase para describir a los profesionales que trabajan con los docentes. Las formaciones de estos abarcan una amplia gama como ser: profesores de matemática, matemáticos, matemáticos educativos, estudiantes de doctorado en matemática o matemática educativa, o profesionales que son contratados por las escuelas o colegios para dictar talleres o desarrollar programas de actualización. Otro problema que señalan Ball y Even es que no hay un claro rol de grupo o identidad ya que cualquier persona que enseña matemática o metodología de la enseñanza de la matemática a futuros docentes o a docentes, se considera un profesional del desarrollo profesional:

Estos distintos profesionales han sido considerados rara vez en forma colectiva como “profesionales del desarrollo profesional de los docentes” o como “formadores de docentes”. La falta de atención en estas personas debilita los esfuerzos internacionales para mejorar la formación docente y el desarrollo profesional.

Como no pensamos en ellos como un grupo profesional, se ha hecho poco trabajo acerca de qué deben saber los “docentes de docentes” y lo que deben hacer para apoyar el aprendizaje de los docentes. ¿Qué conocimiento matemático se necesita para esta tarea? ¿Cómo serán capaces de usar la práctica como un recurso para el aprendizaje de los docentes? ¿Qué hay para aprender del diseño y la utilización de aproximaciones particulares al desarrollo profesional de los docentes? Estas preguntas son complicadas de diferentes maneras por la presencia de formadores de docentes con diferentes características. Lo que debe saber un matemático para ser efectivo en la formación de docentes es muy distinto a las necesidades de aprendizaje de un docente que se dirige a roles de liderazgo. ¿Qué debe ser común a ellos y qué debe ser especial? Los programas y las aproximaciones para apoyar el aprendizaje de los docentes de docentes podría ser mejor compartida entre las naciones. El mejoramiento de la formación docente depende de la calidad de quienes la tienen a cargo. Cuánto podría ganarse a través del intercambio de ideas y enfoques<sup>3</sup>. (p. 257)

Pensar en la enseñanza de nuestra disciplina de referencia implica desarrollar metaconocimiento en tanto supone reflexionar, entre otros asuntos, sobre las transformaciones del conocimiento<sup>4</sup> a enseñar que es, en el caso que nos ocupa, el producido por la investigación. La transformación de este conocimiento implica una adaptación de un saber sabio (entendido como el producido por cierto investigador del campo) para convertirlo en saber a enseñar (Chevallard, 2000) cuyos destinatarios son docentes en ejercicio y el contexto es el que puede darse en ámbitos de formación continua de docentes como los que mencionamos en el apartado 1. Emprender la transformación de ese conocimiento demanda no solo conocimiento específico sino también conocimiento didáctico de ese contenido<sup>5</sup> (Shulman, 2005). Shulman señala que este conocimiento didáctico es resorte exclusivo de quien ejerce la docencia y está ligado a la comprensión profesional del contenido a enseñar. Si estamos pensando en el rol docente del investigador, asumimos que este tiene un profundo conocimiento sobre el saber producido en su labor como investigador pero este saber no supone, necesariamente, un conocimiento específico de las vías de transmisión de dicho conocimiento. Si el objetivo es facilitar la comprensión de dichos saberes, será necesario pensar la forma que adoptará ese saber para que sea susceptible de ser aprehendido, teniendo en cuenta la especificidad de los saberes

<sup>3</sup> La traducción del inglés es nuestra.

<sup>4</sup> No podemos desconocer que en este asunto está implicada no solo la transformación de los conocimientos sino también la selección de los conocimientos a ser enseñados y por tanto hay aspectos ideológicos que operan y condicionan dicha selección (Apple, 1986). Por ejemplo, Boero y Szendrei (1998) centran su atención en los autores que son consultados por las diferentes escuelas en Educación Matemática. Señalan que parecería existir una cierta resistencia a consultar materiales de escuelas a las que no se pertenece. Si bien el punto de la selección de conocimientos merece especial atención, no nos ocuparemos de ello en este trabajo.

<sup>5</sup> Shulman (2005) lista los conocimientos que son necesarios para el docente y señala que como mínimo incluirían: conocimiento del contenido, conocimiento didáctico general, conocimiento del currículo, conocimiento didáctico del contenido, conocimiento de los alumnos y de sus características, conocimiento del contexto educativo y conocimiento de los objetivos, las finalidades y los valores educativos, y de sus fundamentos filosóficos e históricos. En este trabajo nos enfocaremos más que nada en el diseño y preparación de los materiales por lo que nos mantendremos, más que nada, en la esfera del conocimiento del contenido y del conocimiento didáctico del contenido.

en juego, los objetivos educativos, los medios materiales, los destinatarios y el contexto en donde se desarrolla la actividad educativa.

Si pensamos en la adaptación de los saberes para la enseñanza y el consecuente diseño de actividades con el fin de favorecer la comprensión de los resultados de investigación seguramente enfrentemos la dificultad de los profesores en ejercicio para comprender los resultados de investigación. Boero y Szendrei (1998) señalan, por ejemplo, la dificultad de los profesores (y también de los investigadores en este caso ligadas a la escuela de pertenencia) para comprender los términos utilizados en los artículos que presentan investigaciones de metodología cualitativa y también los de perspectiva teórica y sugieren la necesidad de emprender trabajos para contribuir a superar este problema:

En relación a los docentes, para que estos sean capaces de usar más resultados de investigación de los del tipo “información cualitativa” y los de “perspectiva teórica” en las escuelas comunes, pensamos que debe llevarse adelante un amplio trabajo de investigación en formación de docentes y de la formación de docentes en ejercicio. Más aún, los investigadores deben realizar un gran esfuerzo para hacer que su trabajo sea comprendido por docentes comunes<sup>6</sup>. (p. 208)

Jaworski (2003) subraya el valor de los proyectos de desarrollo profesional en los que han participado profesores, educadores e investigadores formando comunidades de indagación. En su experiencia la interacción entre estos actores permitió generar a cada uno de ellos una mirada crítica sobre sus conceptualizaciones de la enseñanza que los enriqueció mutuamente, favoreciendo el desarrollo de las prácticas en todos los niveles.

### 3. EL APRENDIZAJE DESDE UNA PERSPECTIVA SOCIOCULTURAL: ELEMENTOS PARA EL DISEÑO DE LA ENSEÑANZA

Si estamos pensando en el rol docente del investigador con el objetivo de contribuir a la comprensión de resultados de investigación, no solamente debemos pensar en los recursos que utilizaremos para el diseño de las actividades de enseñanza sino también en la forma en que organizaremos el ambiente de aprendizaje. Para ello pongámonos en contexto e imaginemos un aula donde se está dictando un curso o desarrollando un taller en el marco de un evento académico como puede ser un congreso o reunión de investigadores en matemática educativa. Dicho curso o taller está a cargo de un responsable que en nuestro caso es el investigador o su equipo. Entre los asistentes tenemos docentes en ejercicio, estudiantes de formación docente, investigadores y eventualmente otros profesionales interesados en el campo. Se hace necesario establecer ahora cómo concebimos en ese ámbito, el desarrollo de la tarea docente por parte del investigador, con el objetivo mencionado al inicio de esta sección.

La forma en que se proponen las tareas y la manera en que el docente conduce el proceso de enseñanza juegan un rol fundamental en el aprendizaje. Los que referimos como estudiantes en nuestro trabajo, si bien son docentes en ejercicio, estudiantes o investigadores, traen a las diferentes sesiones de trabajo, todos los conocimientos que provienen de su desempeño como profesionales y esto hace que cada uno de ellos posea sus propias explicaciones o intuiciones sobre los fenómenos didácticos que se habrán de analizar. Esto significa que cada uno de ellos posee ciertos conocimientos previos sobre el asunto que se va a abordar, un conocimiento personal que está íntimamente ligado a la formación profesional de cada participante y particularmente a su experiencia como docente de aula. Pea (1993) nos brinda elementos para pensar los procesos de aprendizaje desde una perspectiva sociocultural y a partir de sus aportes extraeremos elementos metodológicos para la acción docente antes propuesta.

Pea aborda el estudio de los procesos de cambio conceptual dando más peso a los factores sociales que a los cognitivos. Señala que el aprendizaje se construye a través de conversaciones, entre las personas, que involucran la creación de comunicaciones y el esfuerzo para interpretarlas. La creación y la

---

<sup>6</sup> La traducción del inglés es nuestra.

interpretación son los procesos de acción recíproca de la conversación humana a través de los cuales es negociado el significado de la acción simbólica que involucra el habla, el uso de representaciones como fórmulas o diagramas, o los gestos. Es así que el significado emerge a partir del diálogo o las acciones simbólicas entre dos interlocutores. Pea sostiene que la *negociación de significados* y la *apropiación* son los dos mecanismos fundamentales que sostienen este proceso de aprendizaje que se da a través de la conversación. La negociación de significados se da cuando a través de la conversación aparecen interpretaciones confusas, pedidos de aclaraciones, de rectificaciones, de elaboraciones, de reformulaciones, de parafraseos u otros dispositivos lingüísticos que permiten indicar problemas en la comprensión. El otro mecanismo, la apropiación, refiere a que el conocimiento de una determinada herramienta se adquiere a través de su uso compartido con otros integrantes de la comunidad. El conocimiento de las funciones de una herramienta no se construye por mera exploración del que aprende sino en interacción con otros que ya conocen sus usos y funciones. Asimismo, en esta interacción entre integrantes de una comunidad pueden surgir otras interpretaciones que transforman la herramienta y nuestro pensamiento. A través de las interpretaciones de los demás podemos darnos cuenta de que el sentido que habíamos construido sobre algo, puede llegar a significar más de lo que pensábamos, dando lugar a interpretaciones más complejas. Asimismo, aprendemos el significado de nuestras producciones cuando aceptamos las interpretaciones de otros sobre lo que hemos dicho. Centrándose en la idea de significado como uso, Pea señala que:

[...] la *experticia* es definida dinámicamente a través de la participación continua en el discurso de una comunidad, no principalmente a través de la posesión de un conjunto de habilidades para la resolución de problemas y estructuras conceptuales. Adquirir experticia es hacerse indistinguible en las acciones y los usos de las representaciones en los juegos del lenguaje que practican otros miembros de una comunidad de prácticas. Estos miembros están tácitamente involucrados en la evaluación de la pertenencia al grupo, cada vez que el individuo se involucra en una conversación con ellos –revelamos competencia comunicativa a través de las acciones y las palabras. (p. 271)

Asumiendo esta perspectiva del aprendizaje, concebiremos el espacio de enseñanza como aquel que favorece las instancias de comunicación e intercambio entre los integrantes de una comunidad que en nuestro caso es la comunidad de matemáticos educativos. Por ello, tanto la dinámica que se propone para la gestión de las sesiones de trabajo como el diseño de actividades de enseñanza promueven la conversación entre los integrantes de la comunidad. Esta conversación se hace posible a través del trabajo en pequeños grupos, discusiones grupales, comunicación de los distintos puntos de vista y un diseño de actividades basado en la *pregunta* como elemento que posibilita y habilita el diálogo entre los participantes, dando lugar a procesos de creación e interpretación que permitirán la emergencia de significados compartidos enriqueciendo la perspectiva de todos los participantes. En este trabajo entenderemos por *comprensión* el proceso por el cual cada sujeto en interacción con otros, avanza en la construcción de significados. Avanzar implica que la negociación de significados da lugar a momentos en los que los significados son compartidos por los integrantes de la comunidad discursiva. Este proceso es dinámico en tanto nuevas interacciones pueden generar nuevos significados. El investigador responsable de llevar adelante la función docente en esta pequeña comunidad tendrá también la oportunidad de abrirse a otras miradas sobre su trabajo y de generar nuevas ideas o interpretaciones tanto para reformular su trabajo como para abrir nuevos problemas de investigación.

#### 4. EL USO DE CASOS PARA EL DISEÑO DE ACTIVIDADES DE ENSEÑANZA

Los casos son instrumentos educativos que presentan información en forma de narrativa en torno a un problema relevante que sumado a la formulación de preguntas críticas, favorecen la generación de hipótesis, el establecimiento de relaciones con situaciones conocidas, el manejo de distintas alternativas y la búsqueda de respuestas para dar solución al dilema que se presenta (Wasserman, 1999). Según esta autora las preguntas críticas son aquellas que obligan a los estudiantes a examinar ideas importantes, nociones y problemas relacionados con el caso. Su objetivo es favorecer la comprensión. Agrega que por la forma en que se redactan demandan una reflexión que vas más allá de la memorización de datos y de la elaboración de respuestas concretas.

Markovits y Smith (2008) proponen el uso de casos para la formación de profesores de matemática porque entienden que es una de las formas de proveer el conocimiento necesario para la enseñanza, tanto a los profesores en formación como a aquellos que ya están en ejercicio. Señalan que aunque todavía es necesaria mayor investigación sobre su uso, existen resultados que ponen en evidencia que el uso de casos mejora el pensamiento pedagógico de los docentes y las habilidades de razonamiento. Consideran dos grandes categorías de casos: los *ejemplares* y las *situaciones problemáticas*. Los primeros son utilizados para presentar situaciones reales de aula donde puede reflejarse en forma vívida la situación sobre la que se desea reflexionar ya sea de naturaleza matemática o didáctica. Las situaciones problemáticas son apropiadas para analizar los efectos de la enseñanza o el desempeño de los estudiantes. En esta última categoría ejemplifican el caso de las *Situaciones de la clase de matemática* que se centran en problemas específicos de la enseñanza de la matemática. Las caracterizan como situaciones de clase que involucran a la matemática y utilizan situaciones reales o ficticias que permiten analizar el pensamiento de los estudiantes a través de situaciones detectadas en la práctica docente o a través de la investigación.

Una fuente para la elaboración de situaciones problemáticas que faciliten la comprensión de determinados resultados de investigación reside, aunque no en forma exclusiva, en los datos que se han recabado en el proceso investigativo. Estos datos pueden ser de diferente naturaleza: producciones de estudiantes, entrevistas a estudiantes, entrevistas a docentes, observaciones de clase, entre otros. Estos datos pueden resultar muy útiles al momento de diseñar situaciones de enseñanza con el fin de ejemplificar la problemática estudiada y contribuir a su comprensión.

## 5. UN EJEMPLO DE DISEÑO

Nuestro centro de interés consiste en facilitar a los profesores en ejercicio la comprensión de los resultados provenientes de trabajos de investigación. Se presentará un diseño de situaciones problemáticas a partir de datos y casos que provienen de una tesis doctoral que aborda algunos aspectos del pensamiento algebraico relativos a la enseñanza del concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales (Ochoviet, 2009). Estos casos permitirán poner en evidencia la problemática que enfrentan los estudiantes de enseñanza media de 14-15 años al iniciarse en el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales. El conjunto de situaciones está pensado para ser trabajado en forma de taller de unas tres horas de duración y su objetivo es lograr que los docentes o investigadores asistentes comprendan las principales tesis del trabajo de investigación.

Si bien el marco presentado por Markovits y Smith (2008), nos brinda elementos para sustentar y pensar los diseños de situaciones problemáticas es necesario precisar algunas diferencias con lo planteado por estas autoras. Como nuestro objetivo es generar situaciones problemáticas que ayuden a comprender resultados emergentes de la investigación, las situaciones que elaboramos no utilizan casos tomados de experiencias de aula sino que se construyeron a partir de los cuestionarios propuestos a los estudiantes participantes para recoger información. Las preguntas de los cuestionarios se complementan con las explicaciones dadas por los estudiantes al resolver la tarea propuesta y con fragmentos de entrevistas que fueron realizadas en el proceso investigativo con el objetivo de profundizar en los procesos de pensamiento de los alumnos participantes. A esto se agregan preguntas críticas<sup>7</sup> (Wasserman, 1999) con diferentes intenciones:

- Establecer relaciones con las prácticas de aula.
- Contextualizar la situación.
- Provocar discusiones entre los integrantes del grupo.
- Interpretar producciones de los estudiantes.

---

<sup>7</sup> Wasserman (1999) define las preguntas críticas como aquellas que demandan el análisis de ideas importantes, nociones y problemas relacionados con cada caso. Requieren una reflexión profunda pues para responderlas no puede usarse únicamente información sino que será necesario establecer relaciones entre múltiples aspectos.

- Utilizar el conocimiento matemático o el conocimiento didáctico.
- Analizar el estado del saber de los estudiantes, su contexto de validez así como sus restricciones.
- Deducir elementos útiles para la enseñanza del tema.

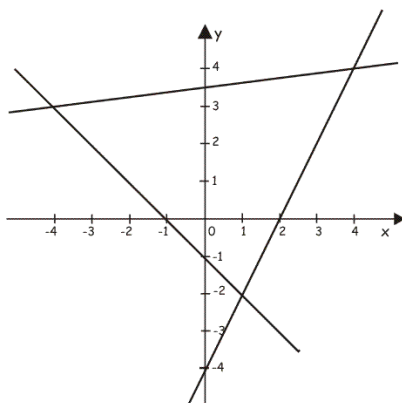
El diseño de las situaciones utiliza las preguntas críticas como vehículo que permite dar lugar a conversaciones entre los participantes que habiliten la negociación de significados y la apropiación con el objetivo de generar aprendizajes desde la perspectiva sociocultural propuesta por Pea (1993).

La secuenciación de actividades que elegimos considera en primer lugar una situación para ser resuelta desde el conocimiento que el profesor posee y luego se agrega información proveniente del proceso investigativo que permite consideraciones quizás no contempladas en respuestas anteriores. Entendemos que esto favorece la discusión de los distintos puntos de vista y la conversación colectiva sobre las ideas.

### Diseño de las actividades

#### ACTIVIDAD 1

1) A continuación aparecen graficadas las rectas asociadas a un sistema de tres ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. ¿Cuántas soluciones tiene el sistema? ¿Por qué?



Verónica (15 años) contesta a la pregunta 1 diciendo que: *"En mi opinión tiene 3 soluciones, porque las rectas se cortan en 3 puntos diferentes, los cuales por lo menos en los sistemas de dos ecuaciones (sic) indican la solución"*.

- Reflexione sobre el tipo de discurso que se utiliza en clase para reconocer gráficamente el caso de solución única para un sistema  $2 \times 2$ . ¿Qué es lo que podría estar conduciendo a los estudiantes a dar respuestas como la de Verónica?
- ¿Qué cambio en el discurso podría haber permitido a Verónica una interpretación más adecuada de esta situación?

En esta actividad se solicita una conexión con los conocimientos que el docente posee sobre el trabajo en el aula. Esto permite que los docentes participantes se vinculen fácilmente con la situación a analizar que se presenta. La pregunta propuesta en la parte a. pretende dirigir la atención a las explicaciones habituales que los docentes dan en clase y la problemática que podrían estar generando en los estudiantes. Dependiendo de las respuestas dadas podrán comenzar a señalarse las primeras sugerencias para un cambio en el discurso de aula que luego, a través de las actividades siguientes, podrán ser re-visitadas, revisadas, reformuladas o ampliadas. El investigador estará asimismo recibiendo retroalimentación a sus puntos de vista y viendo en qué medida sus hallazgos poseen



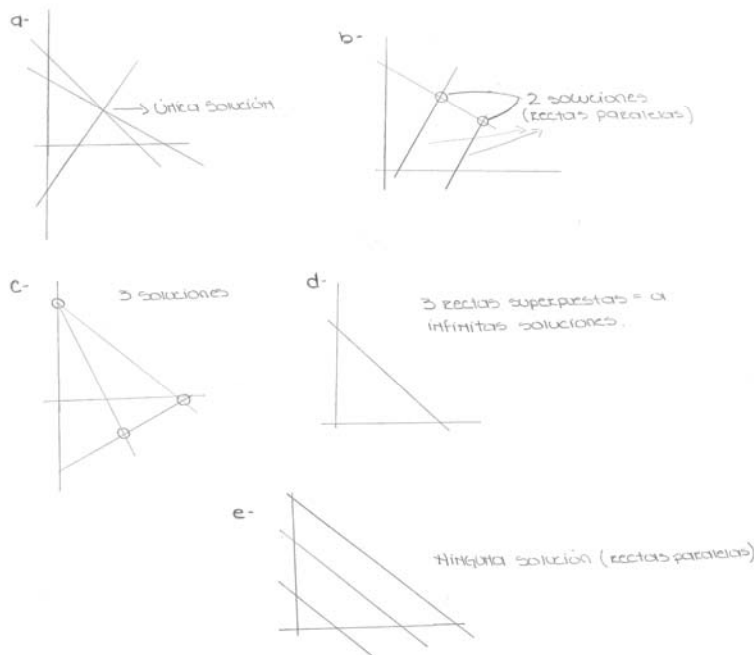
sentido en otros contextos culturales en la medida en que los grupos de trabajo en los que nos hemos centrado, reciben participantes de diversos países, cada uno de ellos poseedor de un contexto educativo y cultural específico.

### ACTIVIDAD 2

Vemos a continuación el trabajo de Verónica en la pregunta 5 del cuestionario aplicado.

- 5) Un sistema de tres ecuaciones de primer grado con dos incógnitas:
- ¿Puede tener una única solución? Si, cuando las 3 rectas se cortan en un mismo punto
  - ¿Puede tener exactamente dos soluciones? Si, cuando las rectas se cortan en 2 puntos diferentes
  - ¿Y exactamente tres? Si, cuando las rectas se cortan en 3 puntos diferentes
  - ¿Puede tener infinitas soluciones? Si, cuando las rectas se superponen
  - ¿Y ninguna? Si, cuando las 3 rectas son paralelas

Explica cada una de tus respuestas e ilustra a través de una representación gráfica.



- Analice si la respuesta de Verónica a la pregunta 5 es coherente con su respuesta a la pregunta 1.
- El conocimiento de solución que tiene Verónica, ¿"funciona" en las diferentes situaciones propuestas?
- ¿Permite la concepción de Verónica dar respuestas correctas para el caso de solución única, de infinitas soluciones o de ninguna solución?
- ¿Qué es lo que permite poner en evidencia las concepciones de Verónica en torno al concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales?

En esta actividad se aporta mayor información que permite ir configurando un mejor mapa del pensamiento de Verónica. Se pide confrontar respuestas de la estudiante con otras dadas por ella anteriormente, complejizando así la visión sobre el estado del saber de la estudiante. También se pretende que se analicen los contextos de validez del conocimiento que la estudiante posee así como sus restricciones para situar la atención en el tipo de tareas que proponemos a los estudiantes. Se intenta mostrar que el modo en que se formula una pregunta a un estudiante puede restringir o favorecer el desarrollo de su pensamiento matemático.

### ACTIVIDAD 3

Para profundizar en el pensamiento de la estudiante, mantuvimos una entrevista donde le propusimos la siguiente cuestión:

¿Son los pares (3, 2), (2, 1) y (1, 4) soluciones del siguiente sistema?

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \\ 3x + y = 7 \end{cases}$$

Para responder, Verónica constató si cada par verificaba las tres ecuaciones y respondió que: "No es ninguno porque al sustituir esos números en las ecuaciones los resultados no son correctos".

De forma que parece tener claro que para que un par ordenado sea solución del sistema debe verificar todas las ecuaciones dadas. En efecto manifestó lo siguiente.

Entrevistadora: Primero te quería preguntar: ¿qué es para vos una solución de un sistema de ecuaciones?

Verónica: Es uno o más números que cuando los cambiás por las letras de las ecuaciones te dan el resultado de esa ecuación, pero tiene que ser en ambas el mismo número.

E: Tú me dijiste ambas, ¿y si fueran más de dos ecuaciones?

V: Supongo que las tres también, el mismo número.

E: ¿Y si fueran cuatro o cinco ecuaciones?

V: También, el mismo número.

[...]

Entrevistadora: Y gráficamente, ¿cómo te das cuenta que un sistema tiene solución?

Verónica: Cuando se cortan las rectas.

E: Porque para ti donde se cortan... ¿qué es?

V: Ese número, o sea el punto ese marca los números que son la solución.

En la entrevista evidencia dudas frente a la respuesta dada a la pregunta 1 del cuestionario y luego realiza la interpretación correcta:

Entrevistadora: Pasemos ahora a ver el trabajito que hicimos en la clase. Acá se te presentaba... ¿te acordás? Un sistema de ecuaciones donde están representadas las rectas asociadas a ellas y te preguntaban cuántas soluciones tenía el sistema. Tú contestaste que el sistema tiene tres soluciones porque las rectas se cortan en tres puntos distintos, ¿podrías decirme cómo te das cuenta que el sistema tiene tres soluciones?

Verónica: No estoy segura si tiene tres o ninguna porque ta, hay tres rectas que representan los tres sistemas, eh... las tres ecuaciones del sistema, pero creo que se deberían cortar todas en el mismo punto para que ese fuera el resultado, entonces capaz que eso está mal.

E: A ver, ¿y cuál sería el problema? Vamos a suponer que las coordenadas de este punto fueran solución ¿podría ser o no?

V: O sea...

E: Si yo te pregunto, a ver, vamos a suponer que este punto tuviera coordenadas (-4,3), ¿podría ser el par (-4,3) solución del sistema?

V: Podría ser solución de esas dos ecuaciones no de todo el sistema, porque falta la otra recta que debería también tener un punto ahí.

E: ¿Y por qué cambiaste de opinión?

V: No sé, razoné.

E: ¿Ya lo habías pensado antes o ahora te diste cuenta?

V: No, ahora.

a. ¿Qué es lo que permite a Verónica realizar la interpretación adecuada?

b. A partir de lo que la estudiante dice, ¿qué aspectos deberían ser enfatizados en clase al enseñar el concepto de solución de un sistema?

c. ¿Considera usted que Verónica comprendió ahora el concepto solución de un sistema?

La actividad presenta información obtenida en una entrevista. Esta información aporta datos importantes que permiten observar en qué aspectos la estudiante ha centrado su atención para dar una respuesta adecuada. Estos aspectos son tan importantes como aquellos que generan errores. Sin embargo es en estos últimos que tanto los docentes como los investigadores sitúan su atención. La parte b pretende que se extraigan elementos para el trabajo en el aula sin que prescriba una forma de hacer o trabajar. Permite al docente observar aspectos importantes a tener en cuenta en la enseñanza del tema pero no le dice cómo hacerlo sino que le abre la posibilidad a que realice sus propias formulaciones o adaptaciones de los materiales que habitualmente usa en clase para enseñar. De ser contestada afirmativamente la parte c. se generará un conflicto en el docente con la información que aportan las actividades siguientes. El objetivo es que el docente observe la “fragilidad” del conocimiento para que genere una visión más comprensiva de las dificultades que enfrentan los estudiantes al estudiar matemática.

#### ACTIVIDAD 4

Veamos cómo explica Verónica a su profesora por qué contestó a la pregunta 1 que había 3 soluciones:

Verónica: [...] había puesto que tenía 3 soluciones pero después me di cuenta que no tenía ninguna.

Profesora: ¿Y en qué te basaste para poner eso al principio?

V: En que antes eran dos rectas nada más y ta y se cortaban en un punto, entonces ta.

P: ¿Y entonces qué te llevó a decir que había 3 soluciones?

V: Porque habían 3 puntos de corte.

P: ¿Y cómo te diste después cuenta de que, o cómo cambiaste después tu opinión con respecto a eso?

V: Porque los puntos de corte sólo se cortan en dos rectas. Si el sistema tiene 3 ecuaciones tendrían que ser las 3 rectas que se corten en un solo punto, tendría una solución común.

a. ¿Coincide lo que manifiesta Verónica con lo que usted señaló en la Actividad 3 parte a.?

En esta actividad el docente recibe más información que le permite retroalimentar, rever o ampliar respuestas dadas anteriormente, conduciéndolo a una visión cada vez más amplia de la problemática que se está analizando.

#### ACTIVIDAD 5

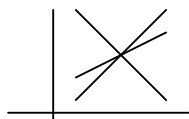
Observemos ahora cómo continúa la entrevista (debemos tener en cuenta que fue realizada en forma previa a la puesta en común señalada en la Actividad 4). Las dudas que manifiesta Verónica nos permitirán constatar que el aprendizaje no es lineal, que es necesario volver una y otra vez sobre los conceptos y que aún cuando parezca que el estudiante ha superado un error, información contradictoria puede continuar coexistiendo en su mente y puede volver a cometer el mismo error que creíamos superado.

Entrevistadora: Entonces, ¿podrías representar gráficamente un sistema de ecuaciones que tuviera solución?

Verónica: ¿Cualquiera?

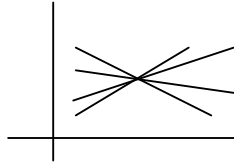
E: Sí, cualquiera.

Presenta lo siguiente:



E: ¿Y si el sistema fuera de cuatro ecuaciones lineales?

Presenta lo siguiente:



E: Y dime, ¿puede ser que un sistema de ecuaciones tenga 3 soluciones?

V: Sí.

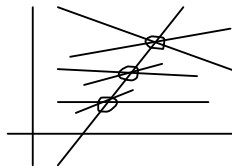
E: ¿Te animas a dibujar uno que tenga 3 soluciones?

(silencio)

V: No sé... ¿En una sola gráfica?

E: Sí, un sistema, cuando estamos hablando de un sistema y lo representamos gráficamente lo hacemos conjuntamente ¿verdad? Es decir, todas las rectas las representamos en el mismo sistema de ejes.

Presenta lo siguiente, circulando los tres puntos de corte como se muestra en la figura:



E: Bueno y ¿cuáles serían allí las tres soluciones?

V: Los tres puntos.

E: Sería un sistema... ¿de cuántas ecuaciones Verónica?

V: Ese de tres.

E: Yo te estoy preguntando el último.

V: Siete.

E: O sea que para ti, este sistema tendría siete ecuaciones y tendría 3 soluciones.

V: Sí.

E: ¿Cómo te das cuenta que tiene 3 soluciones?

V: Porque no sé, se cortan en tres puntos y cada recta representa una ecuación en el sistema.

a. A partir de este fragmento de la entrevista extraiga más elementos que deberían ser tenidos en cuenta para la enseñanza del concepto de solución de un sistema.

b. Para G. Brousseau (1983), el sentido de un conocimiento matemático se define no sólo por la colección de situaciones donde este conocimiento es realizado como teoría matemática; no sólo por la colección de situaciones donde el sujeto lo ha encontrado como medio de solución, sino también por el conjunto de concepciones que rechaza, de errores que evita, de economías que procura, de formulaciones que retoma, etc. Teniendo en cuenta este fragmento de la entrevista de Verónica, ¿cuáles concepciones relativas al tema que nos ocupa sería necesario que la estudiante rechazara?

Aquí se introduce un aporte teórico para que el docente lo relacione con el caso presentado. Consideramos que es una manera adecuada de ir introduciendo conceptualizaciones teóricas – fundamentalmente para aquellos docentes que no las conocen– junto con datos concretos del desempeño de los estudiantes que favorecen una dialéctica entre teoría y práctica.

Como puede observarse, las actividades presentadas no demandan a priori el conocimiento del marco teórico utilizado en el proceso investigativo (Sierpinski, 2000) para promover la reflexión. Como ya señalamos anteriormente, muchos docentes que asisten a instancias de actualización no poseen formación específica en matemática educativa como la que demanda el conocimiento y comprensión

de marcos teóricos diversos y no queremos que esto sea un impedimento para la comprensión de la problemática abordada. Entendemos que en un trabajo posterior bien puede abordarse el marco conceptual que permite una mirada en profundidad de lo analizado y que de esta forma es posible establecer ricos lazos entre la teoría, la investigación y la práctica educativa.

## 6. REFLEXIONES FINALES

En este trabajo pretendimos aportar a la reflexión acerca del rol docente del investigador como aquel que puede contribuir a la comprensión de los resultados de investigación de la Matemática Educativa que él mismo ha generado en su labor profesional. Este rol docente puede ejercerse en espacios de formación continua para profesores o en eventos académicos que reúnen a los interesados en el conocimiento producido por el campo. El marco teórico aportado por Pea (1993) permite una conceptualización para el diseño de la enseñanza que en nuestro caso se centró en dos aspectos fundamentales: la metodología a emplear en la conducción del proceso de enseñanza y el diseño de actividades. Tanto en la gestión del proceso de enseñanza como en la fase de abordaje de las actividades se pretende promover la conversación entre integrantes de una comunidad como motor de procesos de creación e interpretación que favorezcan el objetivo planteado: la comprensión de conocimientos de la Matemática Educativa.

### Referencias bibliográficas

- Apple, M. (1986). *Ideología y currículo*. Akal: Madrid.
- Ball, D. L. (2000). Working on the inside: Using one's own practice as a site for studying mathematics teaching and learning. In A. Kelly & R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (365-402). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Ball, D., & Even, R. (2008). Strengthening Practice in and Research on the Professional Education and Development of Teachers of Mathematics: Next Steps. In Even, R. & Ball, D. (Eds.), *The professional education and development of teachers of mathematics: The 15th ICMI Study* (255-259). New York: Springer.
- Boero, P. & Szendrei J. R. (1998). Research and Results in Mathematics Education: Some Contradictory Aspects. En Sierpinska, A. & Kilpatrick, J. (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (197-212). Kluwer Academic Publishers. Great Britain.
- Borko, H. (2004). Professional Development and Teacher Learning: Mapping the Terrain. *Educational Researcher*, 33(8), 3-15.
- Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* (La Pensée Sauvage), 4(2), 165-198. En español en <http://fractus.uson.mx/Papers/Brousseau/ObstaculosBrousseau.htm>
- Cantor, R. (2007). ¿Publicar o perecer, o publicar y perecer? *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 10(3), 311-313.
- Chevallard, Y. (2000). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.
- Czarnocha, B. & Prabhu, V. (2005). Teaching-Research and Design Experiment – two methodologies of integrating research and classroom practice. HBCSE, TIFR. En [http://www.hbcse.tifr.res.in/episteme1/themes/OP\\_Czarnocha\\_PrabhuModified.pdf](http://www.hbcse.tifr.res.in/episteme1/themes/OP_Czarnocha_PrabhuModified.pdf)

Desgagné, S., Bednarz, N., Lebuis, P., Poirier, L. et Couture, C. (2001). L'approche collaborative de recherche en éducation: un rapport nouveau à établir entre recherche et formation. *Revue des sciences de l'éducation*, Vol. XXVII, 1, 33 – 64.

Even, R. (1999). Integrating academic and practical knowledge in a teacher leaders' development program. *Educational Studies in Mathematics*, 38(1-3), 235 – 252.

Jaworski, B. (2004). Inquiry as a pervasive pedagogic process in mathematics education development. In *CERME 3 (Group 11)*. Bellaria, Italy: <http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3>.

Markovits, Z. & Smith, M. (2008). Cases as tools in mathematics teacher education. In: T. Wood (Series Ed.) & D. Tirosh (Vol. Ed.), *International Handbook of Mathematics Teacher Education, 2: Tools and Processes in Mathematics Teacher Education* (39-64). Rotterdam, the Netherlands: Sense Publishers.

Moschkovich, J. & Brenner, M. E. (2000). Using a Naturalistic Lens on Mathematics and Science Cognition and Learning. En A. E. Kelly & R. Lesh (Eds.), *Research Design in Mathematics and Science Education* (457-486). Mahwah, Erlbaum.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1991). *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*. Sevilla: SAEM Thales.

Ochoviet, C. (2009). Sobre el concepto de *solución* de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Tesis doctoral. CICATA-IPN. México. En <http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis03.html>

Ochoviet, C. (2007). Una lectura del estado de la investigación en educación matemática y un “por aquí cómo andamos”. *Conversación*, 19, 45-50.

Ochoviet, C. y Oktaç, A. (2010). Un diseño metodológico para integrar la investigación con la enseñanza. *Publicación de Aniversario. A diez años del Posgrado en Línea en Matemática Educativa en el IPN*, 175-191. En <http://www.matedu.cicata.ipn.mx/aniversario/publicaciones.html>

Pea, R. D. (1993). Learning scientific concepts through material and social activities: Conversational analysis meets conceptual change. *Educational Psychologist*, 28(3), 265-277.

Raymond, A. & Leinenbach, M. (2000). Collaborative action research on the learning and teaching of algebra: a story of one mathematics teacher's development. *Educational Studies in Mathematics*, 41 (3), 283-307.

Shulman, L. (2005). Conocimiento y enseñanza: Fundamentos de la nueva reforma. *Revista de currículum y formación del profesorado*, 9(2), 1-31.

Sierpinska, A. & Kilpatrick, J. (1998). Continuing the Search. En Sierpinska, A. & Kilpatrick, J. (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (527-548). Kluwer Academic Publishers. Great Britain.

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra. En J.-L. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* (209-246). Kluwer Academic Publishers.

Tsamir, P. (2008). Using theories as tools in mathematics teacher education. In D. Tirosh & T. Wood (Eds.), *The International Handbook of Mathematics Teacher Education Volume 2: Tools and Processes in Mathematics Teacher Education* (211-234). Rotterdam: Sense Publishers.

Wasserman, S. (1999). *El Estudio de casos como método de enseñanza*. Buenos Aires: Amorrortu.