¿Nuevos escenarios para el aprendizaje de las matemáticas?

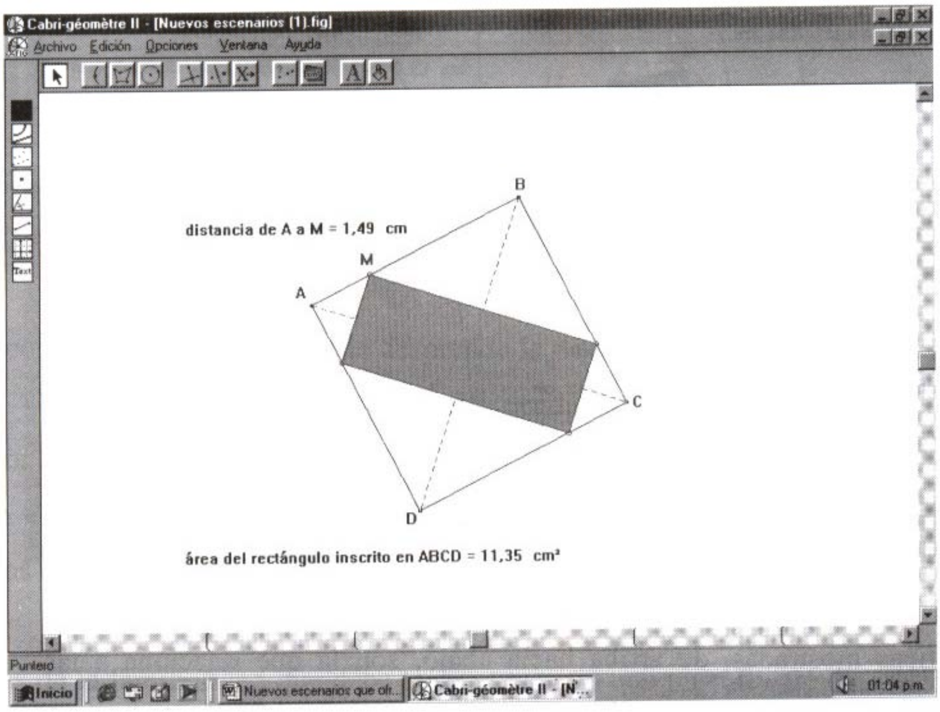
Gonzalo Zubieta Badillo
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav.

Resumen
Con el advenimiento de la tecnología es necesario tener una postura al respecto, y para ello, es imprescindible utilizarla para conocer lo que ofrece tanto en facilidades como en dificultades y limitaciones, en nuestro caso específico con relación al aprendizaje de las matemáticas. También debemos tener en cuenta, como lo señalan Arcavi, Abraham y Hadas, Nurit (2000) ... *la herramienta tecnológica en si misma es de poco valor si no es acompañada por situaciones problema que le dan significado*. Ilustraremos con algunos ejemplos lo que ofrece el software dinámico y discutiremos si representan *nuevos escenarios* para que los estudiantes aprendan matemáticas.

Presentación
Iniciaremos con un caso típico de máximo o/y mínimo, de los que suelen proponerse a los estudiantes como aplicación del tema, en un curso usual de Cálculo:

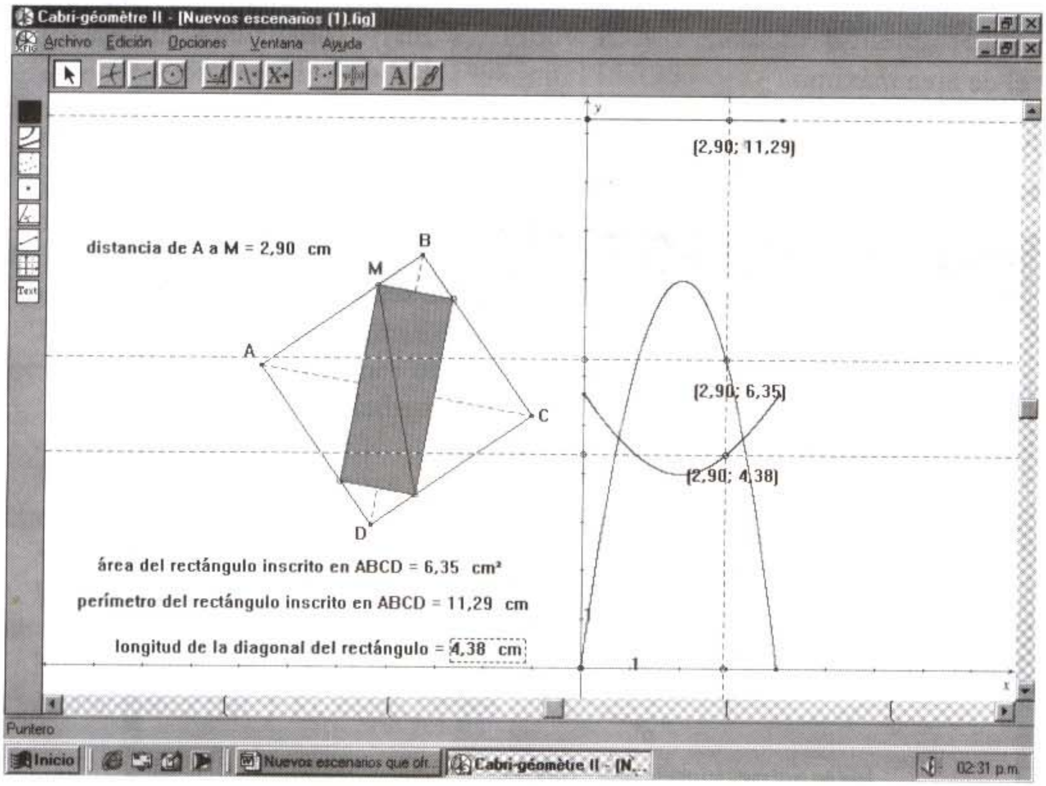
De todos los rectángulos inscritos en un cuadrado con lados paralelos a sus diagonales, encontrar el de área máxima.

A continuación realizamos la construcción solicitada, utilizando el software Cabri-Géomètre



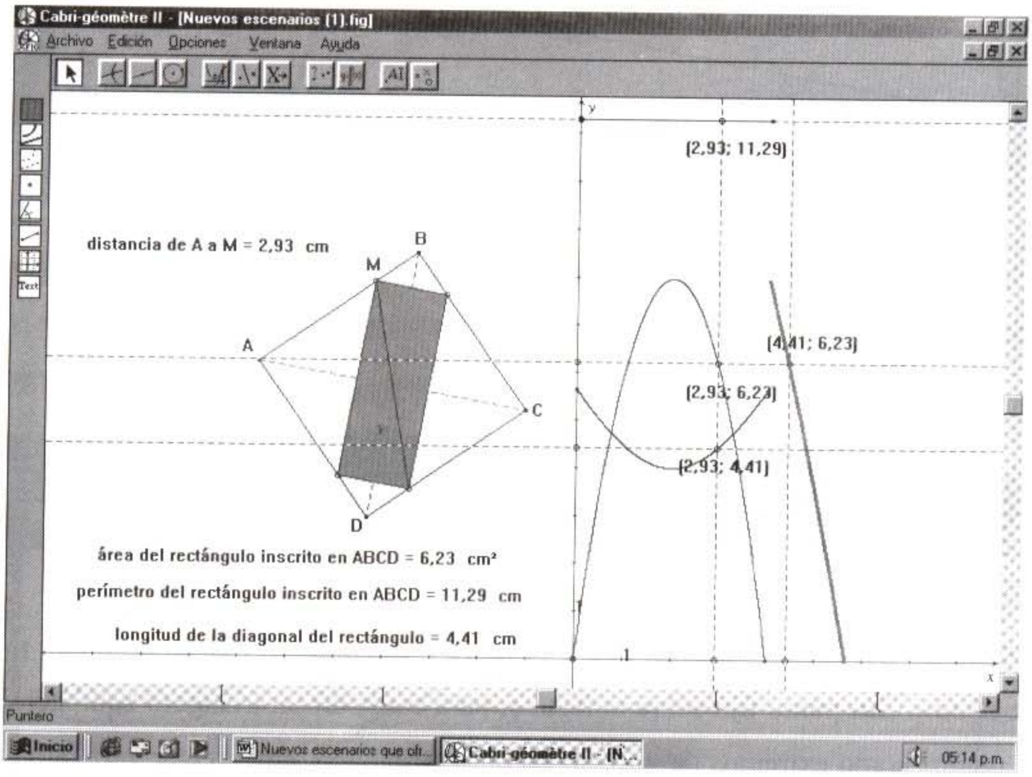
En la pantalla el cuadrado dado ABCD y el rectángulo inscrito en dicho cuadrado cuyos lados son paralelos a las diagonales; un vértice de este cuadrado es M y al desplazarlo obtenemos todos los rectángulos inscritos en dicho cuadrado, donde el área se actualiza para cada caso y cuando M coincide con los vértices A o B resulta que el área vale cero. De esta manera, al desplazar M y observar el valor del área del rectángulo inscrito, el usuario puede localizar la posición de M sobre AB para la cual se tiene el área máxima, en forma aproximada y de ahí conjeturar su valor exacto.

Al desplazar M sobre AB se observan otras posibles variables como pueden ser el perímetro del rectángulo o la longitud de la diagonal del rectángulo, como posibles exploraciones adicionales del problema planteado. Esto es, para cada posición de M sobre AB, referida como la variable *distancia de A a M*, se tienen valores particulares para las variables restantes o sea: área del rectángulo, perímetro del rectángulo y longitud de la diagonal del rectángulo; por lo tanto, podríamos encontrar las gráficas de cualquier par de dichas variables, como se muestra en la pantalla siguiente:



Las tres gráficas mostradas, de arriba hacia abajo, son la que relaciona a las variables distancia de A a M y perímetro del rectángulo inscrito en ABCD, representada por un segmento de recta paralelo al eje horizontal y por lo tanto, nos indica que su perímetro es constante igual a 11.29 cm. para toda posición de M sobre AB; la gráfica que sigue al parecer una parte de una parábola que abre hacia abajo, relaciona a las variables distancia de A a M y área del rectángulo inscrito en ABCD, que tiene un punto de ordenada máxima, lo que solicitaba el enunciado del problema original y finalmente, la última gráfica que relaciona a las variables distancia de A a M y longitud de la diagonal del rectángulo inscrito en ABCD, que tiene un punto de ordenada mínima.

Por supuesto se podrían obtener las gráficas que relacionan otras variables, por ejemplo, la que relaciona a las variables longitud de la diagonal del rectángulo inscrito en ABCD y área del rectángulo inscrito en ABCD, como se muestra en la pantalla que sigue:

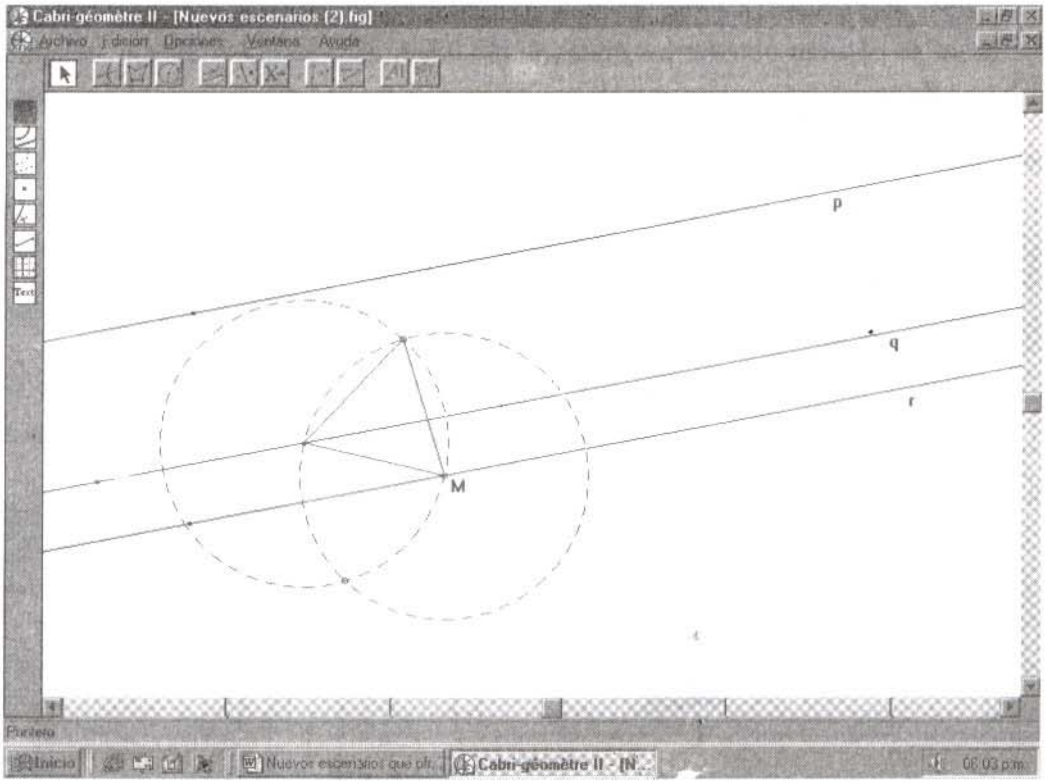


De lo comentado anteriormente se desprende la riqueza que genera un problema cuando se utiliza un software dinámico, quedando pendientes varias cuestiones como son las ecuaciones de las gráficas mostradas, que en el caso particular de Cabri si dichas gráficas no son cónicas, ¿cómo encontrar sus ecuaciones? y otras como ¿por qué los rectángulos inscritos en ABCD tienen perímetro constante?

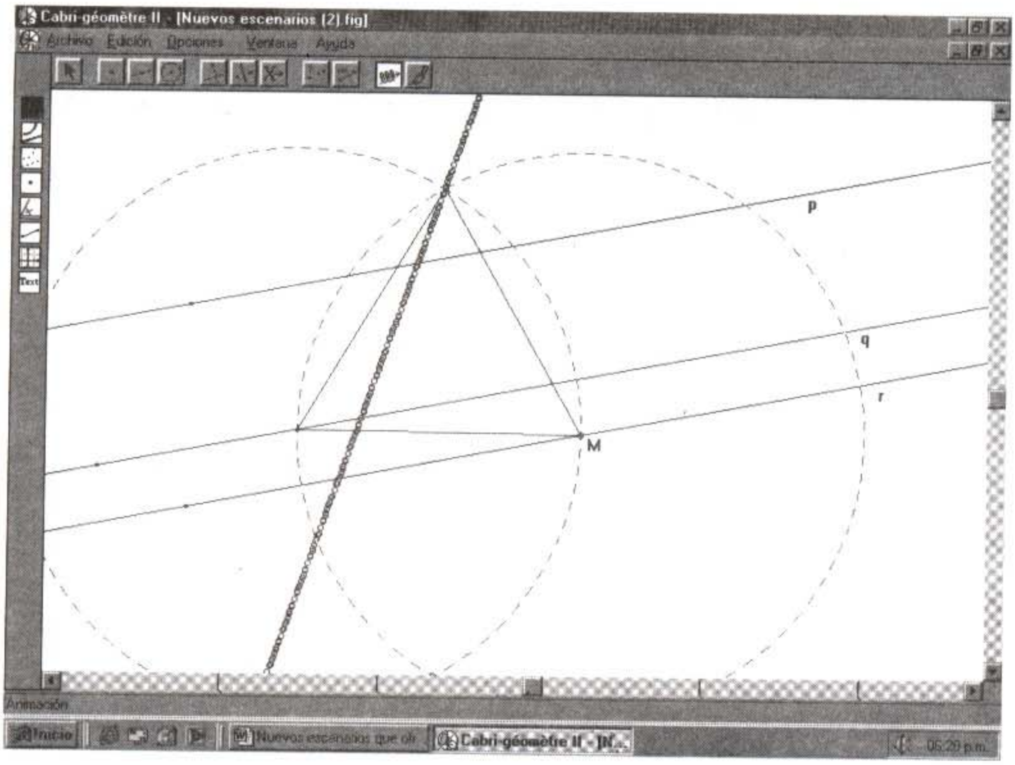
Además de la familiaridad que debe tener el usuario con un software dinámico, un aspecto crucial es el que sea capaz de realizar construcciones, lo que no es nada nuevo, ya que en los libros de Euclides una gran parte de sus proposiciones están dedicadas a este propósito. Por lo tanto, nuestro siguiente problema es realizar una construcción no trivial:

Dadas tres rectas paralelas construir un triángulo equilátero cuyos vértices estén sobre cada una de las rectas mencionadas

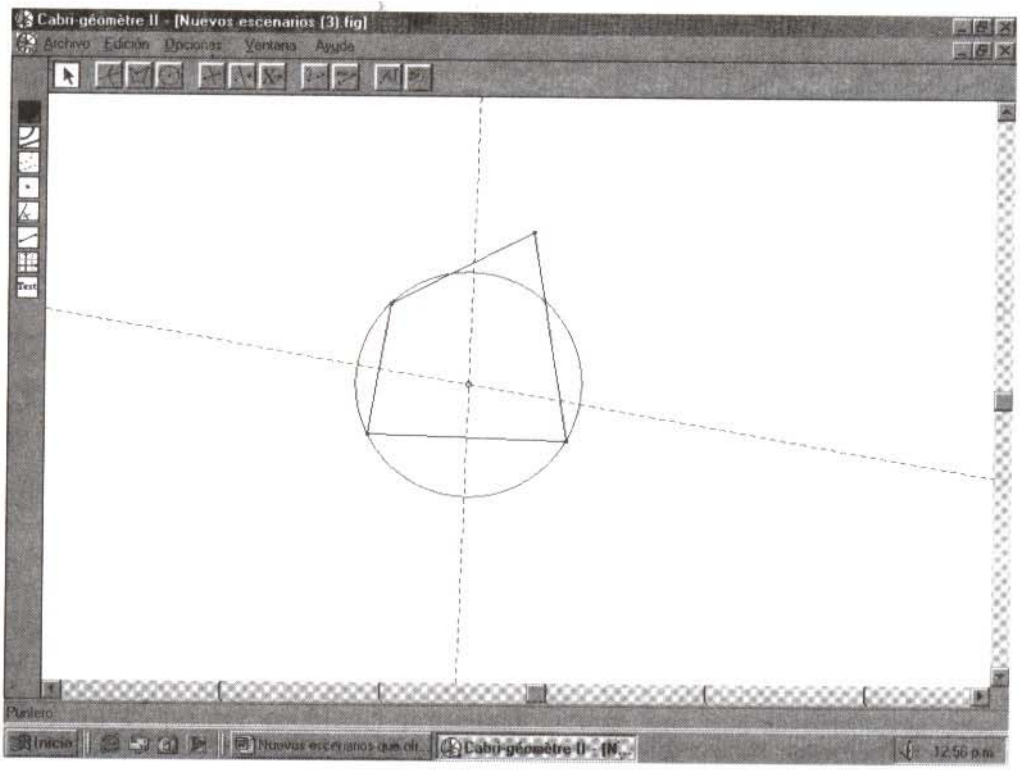
En la pantalla, a continuación, mostramos un acercamiento a lo solicitado

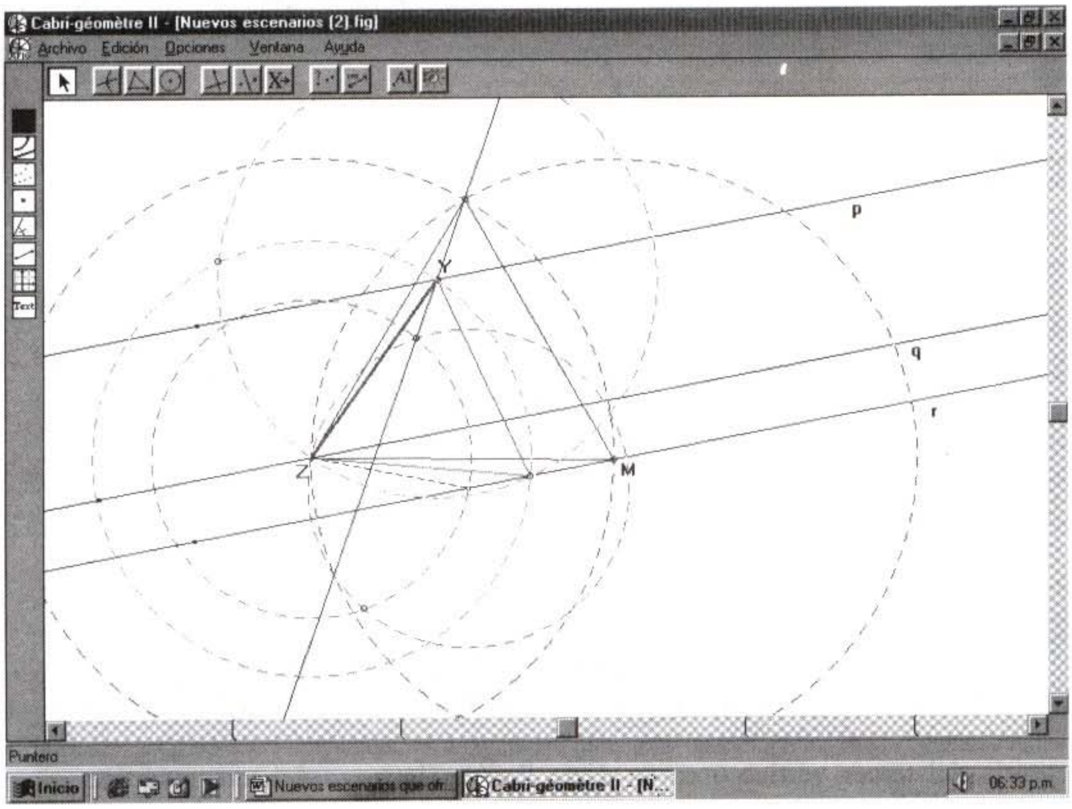


En la pantalla las tres rectas paralelas *p, q* y *r*; sobre *r* elegimos M que es un punto móvil sobre esta recta y otro punto fijo sobre la recta *q*, para construir un triángulo equilátero con estos dos puntos como extremos de un lado de dicho triángulo, cuyo tercer vértice no está sobre *p*. Ahora, cuando M se desplaza sobre *r*, ¿qué trayectoria describe el tercer vértice? Veâmoslo a continuación



La trayectoria del tercer vértice o como suele llamársele *traza* del tercer vértice, es una recta y por lo tanto, esta pista nos permite realizar la construcción pedida, que es la siguiente:



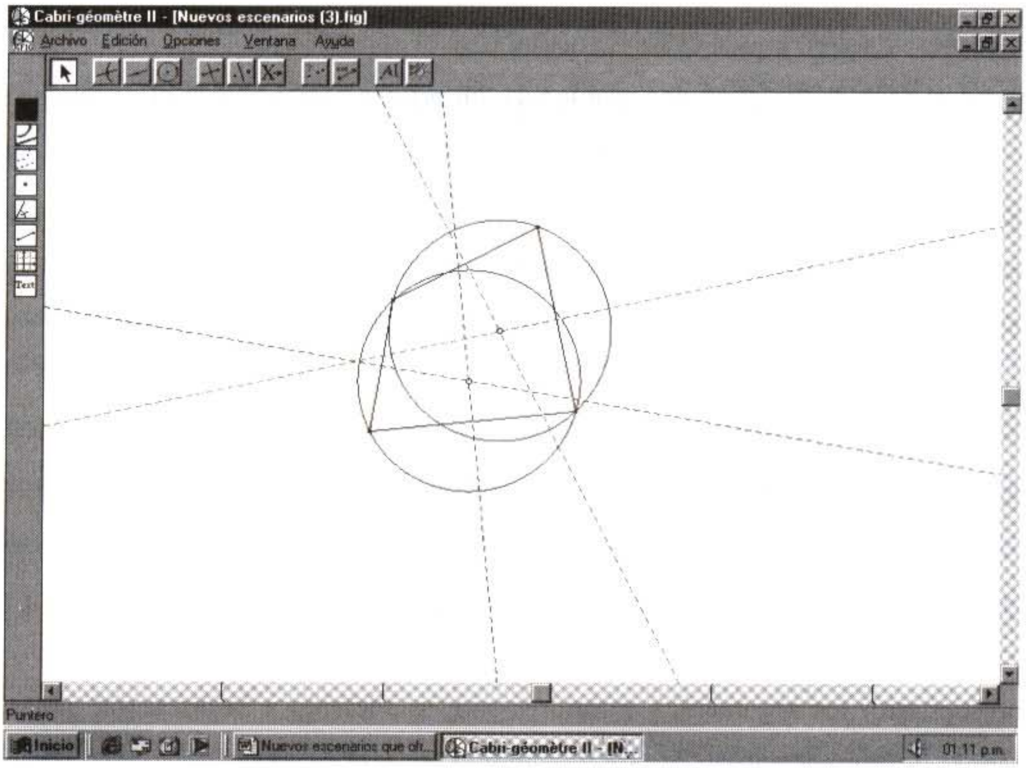


La traza del tercer vértice es la recta, en trazo continuo, que corta a las paralelas y el segmento ZY es el lado del triángulo equilátero que cumple con los requisitos de la construcción solicitada.

Finalmente, en los cursos de geometría es común hablar de *teoremas*, sin embargo, éstos no son propuestos por los estudiantes sino por el profesor, mientras que con los softwares dinámicos se intenta que los estudiantes *descubran* un teorema al realizar una actividad como la siguiente (suponiendo que ellos ya saben trazar la circunferencia circunscrita a un triángulo):

Construir un cuadrilátero y encuentra la(las) característica(s) para que sus cuatro vértices estén en una misma circunferencia

En la pantalla se aprecia un acercamiento que consiste en trazar la circunferencia por tres vértices del cuadrilátero construido y el cuarto vértice fuera de dicha circunferencia. A continuación dos opciones: mover el cuarto vértice para que esté sobre la circunferencia



En este dibujo Cabri, lo que se puede mover son los vértices del cuadrilátero y al hacerlo, se mueve al menos uno de los centros de las circunferencias trazadas, de manera que moviendo el vértice se hacen coincidir a los centros de ambas circunferencias para que los cuatro vértices del cuadrilátero estén sobre una misma circunferencia. Ambas situaciones, una circunferencia trazada por tres vértices del cuadrilátero y el cuarto vértice moverlo para que esté sobre dicha circunferencia o trazar dos circunferencias y luego mover uno de los vértices del cuadrilátero para que coincidan los centros de ambas circunferencias, llevan a lo mismo y se esperaría que después alguien propusiera que los ángulos opuestos del cuadrilátero son suplementarios.

Discusión

Mis argumentos a favor de que el software ofrece nuevos escenarios son:

- Para el primer problema presentado, considero que la estrategia de realizar un modelo geométrico, de inicio, es completamente diferente de la utilizada en un curso de Cálculo. Además, al mover uno de los elementos en el modelo geométrico se advierten otras variables involucradas, no nada más las de interés, lo que da lugar a nuevas indagaciones a través de gráficas, tanto para interpretarlas así como vincularlas al modelo geométrico, dando la posibilidad de cambiar de registros de representación, lo que es fundamental para el aprendizaje.

- En el caso de los otros dos problemas, un primer acercamiento al problema consiste en construir una solución que cumpla parcialmente lo pedido y al agregar el movimiento de alguno de sus elementos aparece la pista, si el usuario hace alguna observación pertinente, esto es, depende del que mira, sin embargo si no aprendemos a visualizar, esta posibilidad quedaría cancelada lo que no debe ocurrir en el aprendizaje.
- Al realizar actividades utilizando el software el usuario se enfrenta a determinadas situaciones, algunas inesperadas, las cuales deben encajar con el conocimiento que posee o debe revisar su conocimiento para que la nueva situación tenga acomodo, sin contradicción, con el conocimiento anterior.

Por supuesto, los argumentos anteriores son un adelanto a la discusión que se tendrá después de la presentación de este documento, en este evento.

Referencias

Abraham Arcavi and Nurit Hadas; *Computer mediated learning: An example of an approach*; En **Representations and Mathematics Visualization**, Editado por Fernando Hitt, 2002.