La convención matemática: Un estudio sobre la búsqueda de coherencia de conocimiento

Gustavo Martínez Sierra •
Rosa María Farfán Márquez ϒ

Resumen

En el presente escrito son presentados algunos de los resultados parciales de una investigación más amplia sobre construcción del conocimiento desde la *perspectiva socioepistemológica*. Nuestro análisis sociogenético ha permitido detectar diversas formulaciones del concepto exponente, que a su vez pueden ser descritas a través de un mecanismo constructivo común. Se ha denominado *convención matemática* al mecanismo y se lo ha caracterizado en tanto su función para la integración sistémica de un conjunto de conocimientos. En este artículo se presentan los detalles del análisis que permite proporcionar tal caracterización.

Palabras claves: Socioepistemología, construcción de conocimiento, integración sistémica, convención matemática, exponentes.

Antecedentes

Desde hace tiempo nuestro interés descansa sobre la naturaleza y funciones de las *reglas de transformación para los exponentes no naturales* (*m, n números naturales*)[1]: *R*1) $a^0 = 1$, *R*2) $a^{-n} = 1/a^n$ & $1/a^n = a^{-n}$, *R*3) $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ & $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$. El interés inicial por estas reglas se debió a la presencia de un fenómeno singular respecto diversos tipos de razonamientos de estudiantes al momento de ser cuestionados con respecto a igualdades que involucran exponentes no naturales. Tales razonamientos tienen la particularidad de que, a pesar de ser coherentes, llevan a repuestas que no están de acuerdo con lo aceptado dentro del corpus algebraico de conocimientos; es decir que son respuestas que no permiten construir conocimiento. En diversos niveles escolares, pero particularmente en el nivel secundario (alumnos de 12-15 años) y en medio superior (alumnos de 15-18 años), podemos encontrar argumentos como los siguientes (para una explicación detallada de estas y otras respuestas puede ser consultado (Martínez, 2002)):

Argumento *A*. $2^0 = 0$ ya que 'el 2 no se multiplica ninguna vez y queda nada'.
Argumento *B*. $2^0 = 2$ ya 'el 2 no se multiplica ninguna vez por lo que queda un 2'.
Argumento *C*. $2^1 = (2)(2) = 4$ ya que 'multiplicamos una vez'.
Argumento *D*. $2^{-3} = (-2)(-2)(-2)$.
Argumento *E*. $2^{-4} = -16$ ya que '$2^4 = 16$ y se le pone un signo'.

• Programa de Matemática Educativa del Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional. CICATA-IPN, México. Centro de Investigación en Matemática Educativa de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero, México.
ϒ Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. Cinvestav-IPN, México.

[1] Cabe señalar que es común establecer la restricción $a > 0$. A lo largo de este escrito se referira a estas reglas con la expresión corta: Reglas de transformación.

La coherencia de los argumentos anteriores descansa sobre varios aspectos solidarios: a) El significado del cero como representante de la “nada” o de “ninguno”, b) la utilización del Modelo de Multiplicación Reiterada (MMR)[2] para el tratamiento de los exponentes y c) la segmentación del número negativo como "número positivo" con "el signo menos". Este grado de coherencia, que da respuestas “erradas”, y la justificación por autoridad – del libro de texto o del profesor – por ejemplo, ‘todo número elevado al exponente cero es uno’ atrae la atención sobre la naturaleza del conocimiento matemático que establece que $2^0 = 1$. Un primer acercamiento consiste en consultar los libros de texto.

El casi cualquier libro de texto de Álgebra es posible notar la siguiente secuenciación de los contenidos relativos a los exponentes: Exponente como abreviación de la multiplicación reiterada, exponente cero, exponentes negativos y exponentes fraccionarios. Cabe señalar que esta secuenciación es de carácter transversal; pues no necesariamente los temas son tratados uno después del otro. Lo anterior muestra que dentro de la matemática escolar el problema de la introducción del concepto de exponente se concibe como un problema de extensión del dominio de valores que puede tomar x en la expresión a^x; sin bien el caso cuando x es un número irracional no es tratado en los textos de Álgebra. Un aspecto marca la teleología instruccional de la secuenciación: aplicar eficientemente las *reglas de transformación para los exponentes no naturales*. Dichas transformaciones son utilizadas en la escuela para realizar operaciones con monomios, aplicar reglas de derivación e integración y para la definición de la función exponencial y logaritmo. Este fin instruccional determina que el origen y la función de las reglas $R1$, $R2$ y $R3$[3] *no son objetos de enseñanza*. Lo que explica, en parte, porque es relativamente raro aquel estudiante o profesor que puede proporcionar argumentos de carácter teórico para establecer las igualdades contenidas en las reglas y cuándo así sucede los argumentos toman la forma de demostración[4]. Otra de las características sobresalientes de los elementos de la secuenciación es que todos ellos tienen una misma jerarquía; no se presta más atención a uno u a otro. Esto aporta un elemento para explicar, por ejemplo, la utilización de los estudiantes del MMR con exponentes en donde ello no es posible. Para los estudiantes principiantes en el tema no hay distinción entre los exponentes y los familiarizados recurren a las reglas de transformación.

Si bien se ha hecho la observación de que el origen y la función de las reglas de transformación *no son objetos de enseñanza*, es de señalarse que los libros de texto comúnmente manejan justificaciones que tienen el papel de *objetos transaccionales* entre lo antiguo y lo nuevo (Chevallard, 1997); pues en las ocasiones de uso, tales como los ejercicios propuestos, ellas no juegan ningún papel. El análisis del contenido de los libros revela que la introducción de exponentes no naturales se basa en el argumento de que su definición ha de ser de tal manera, que las Leyes de los Exponentes para los Naturales (LEN) se conserven: 1) $A^nA^m=A^{n+m}$, 2) $A^n/A^m=A^{n-m}$ con $n>m$ y 3) $(A^n)^m=A^{nm}$.

---

[2] El MMR es la definición canónica para el tratamiento de los exponentes contenidos en el conjunto $\boldsymbol{N^*} = \{2, 3, 4, 5,\ldots\}$. Es decir si $n \in \boldsymbol{N^*}$ se tiene que $a^n = (a)(a)\ldots(a)$ [n-veces]. Se señala que el conjunto $\boldsymbol{N^*}$ no es el conjunto de los números naturales.

[3] Eventualmente es posible encontrar argumentos para la igualdad $R1$ a través del *Argumento de División de Potencias* que mencionaremos más adelante.

[4] Para “demostrar” que $2^0=1$, se utiliza la “ley de los exponentes” para la división de la siguiente manera: $1=2^2/2^2=2^{2-2}=2^0$ entonces $2^0=1$, es decir que su valor se *deduce*.

Tal y como lo muestra la Tabla 1 no hay uniformidad sobre cual de las LEN debe seguirse cumpliendo (los textos y el exponente cero se han tomado a título de ejemplo por ser representativos en lo que respecta a los argumentos):

Libro	**Argumento para introducir exponentes no naturales**	**Argumento para introducir el exponente cero**
Wentworth y Smith (1985). *Elementos de álgebra*.	*"Los exponentes fraccionarios (negativos) deben interpretarse de manera tal que a ellos se apliquen todas las leyes que se aplican a los exponentes enteros positivos"* $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	*"Para que el símbolo a^0 obedezca las leyes generales de las otras potencias, debe tenerse: $a^0 \cdot a^m = a^{0+m} = a^m$; o, lo que es lo mismo, $a^0 \cdot a^m = 1 \cdot a^m$; y por tanto, $a^0 = 1$. Así pues,* *Toda cantidad elevada a la cero es igual a 1".*
Rees et al. (1982). *Álgebra contemporá-nea*.	Para el caso de los exponentes negativos que se cumpla la *ley de los exponentes para la división* $a^m / a^n = a^{m-n}, \quad m > n$ Para el caso de los exponentes de la forma 1/*n* que se cumpla la *ley de la potencia de una potencia.*	*"ley de los exponentes para la división:* $a^m / a^n = a^{m-n}, \quad m > n$ *Se demostrará más adelante que esta ley se cumple si $m < n$ pero aquí se considerará el caso particular cuando $m = n$. En este caso, se obtiene* $a^n / a^n = a^{n-n} = a^0$ *La definición* [a través del MMR] *es válida únicamente para el caso en que n sea un entero positivo por lo que a^0 no tiene sentido; sin embargo, $a^n / a^n = 1$ de donde es lógico definir a a^0 como el número 1".*
Baldor (1983). *Álgebra*.	Como consecuencia de las 'leyes de la división' (exponente cero y negativo). Como consecuencia de un patrón de extracción de raíz.[5]	*El exponente cero proviene de dividir potencias iguales de la misma base.*
Kalnin (1978). *Álgebra y funciones elementales*.	Ninguna. La introduce por definición.	Ninguna. La introduce por definición.

Tabla 1. Argumentos en los textos para introducir exponentes no naturales

Los argumentos anteriores representan un primer acercamiento a la naturaleza y funciones de las reglas de transformación: son convenciones matemáticas. Se aclara la elección de la expresión *convención matemática* para nombrar tal naturaleza. La acepción que utilizamos para convención es la que señala aquello que es adecuado para algún fin específico; entonces una convención matemática es una conveniencia para las matemáticas. Pero ¿qué es aquello que es conveniente para las matemáticas? Esta pregunta subraya que el uso de la expresión debe ser *funcional*; es decir, que debe señalar las funciones de conveniencia. De lo anterior entonces podemos describir que las reglas de transformación son convenciones matemáticas para preservar las LEN cuando los exponentes son números racionales. De lo anterior se desprende que, en términos del formalismo matemático, el establecimiento de *R*1, *R*2 y *R*3 no es través de

[5] Textualmente: "El exponente fraccionario proviene de extraer una raíz a una potencia cuando el exponente de la cantidad subradical no es divisible por el índice de la raíz".

un proceso de demostración matemática; sino más bien corresponde a un proceso de axiomatización.

Lo anterior proporciona un primer acercamiento a la naturaleza y funciones de las reglas de transformación. Sin embargo, al estar interesados en los procesos de construcción de conocimiento ello no es suficiente. Para explicar esto presentamos a los supuestos teóricos básicos de la investigación.

Marco teórico

En el marco teórico que se ha denominado *perspectiva socioepistemológica* la atención se centra en la caracterización de "aquello que permite la construcción del conocimiento matemático". Tal objetivo general de investigación supone que de entrada es necesario tomar en cuenta todas las relaciones o restricciones a las que están inmersas las personas y las comunidades en proceso de construcción de conocimiento considerado como nuevo. La complejidad de tales relaciones puede ser particularmente amplía; pero las evidencias han mostrado que es productivo establecer que las relaciones básicas son con: 1) los modos de comunicación del conocimiento, 2) el conocimiento mismo, 3) la particular forma de pensar del ser humano y 4) el entorno social y cultural. De manera sintética se hace referencia, respectivamente, a las componentes didáctica, epistemológica, cognitiva y social. Este modelo básico conforma múltiples líneas de investigación, que buscan caracterizar los escenarios que permiten la construcción del conocimiento en situación escolar; ya que se postula que la determinación de principios, que regulan la construcción del conocimiento, proporciona los elementos necesarios para predecir e intervenir en la evolución de una comunidad integrada con el objetivo de estudiar un contenido o enfrentada a situaciones problemáticas de tipo matemático.

Al estar interesados en los procesos de construcción de conocimiento resulta metodológicamente obligado estudiar la sociogénesis (o el origen social) de los conocimientos; lo cuál, entre otras consecuencias, ha permitido tomar distancia de los conceptos matemáticos institucionalizados en la actualidad, que se perciben como producto de organizaciones del conocimiento independientes de su construcción primigenia; como por ejemplo el contenido matemático presentado arriba. Lo anterior no quiere decir que tales organizaciones no sean importantes para nuestras investigaciones sobre construcción de conocimiento; sino que llama la atención sobre la existencia de diferentes planos de construcción de conocimiento que modifican su naturaleza y funcionalidad[6]. Las consideraciones anteriores han permitido distinguirnos de aquellos investigadores que centran su atención en los conceptos matemáticos. Sólo por considerar a las investigaciones que dieron los primeros pasos en este camino, mencionamos algunas de las nociones[7], que se han encontrado, y que están presentes en la construcción de conocimiento matemático: la de *acumulación* en la construcción de concepto de integral definida (Cordero, 1994), la *predicción* en la construcción de serie de Taylor (Cantoral, 1990) y el *estado permanente* en la construcción del concepto de convergencia de series infinitas (Farfán, 1997).

---

[6] En otro lugar se reportaran algunos de los resultados de nuestras investigaciones sobre los fenómenos de difusión del conocimiento relacionados con el mecanismo aquí descrito.

[7] Aquí utilizamos la distinción que Piaget y García (1991, p. 103) hacen entre *noción* y *concepto* (cursivas en el original): "Este pasaje de *uso* [de una noción] o aplicación implícita, a la utilización consciente, a la *conceptualización*, constituye lo que hemos llamado *tematización*".

Los ejemplos anteriores señalan la importancia de las nociones, o lo que subyace, que están presentes en la construcción de conocimiento. A este respecto un principio general, que funciona como hipótesis general, consiste en considerar que los conceptos primero son usados, luego descubiertos y posteriormente son definidos. De manera específica aquí centramos la atención en determinar lo que posibilitó, en la sociogénesis, la formulación del concepto de exponente no natural. Ello nos lleva a caracterizar el funcionamiento de un mecanismo de construcción de conocimiento – al que hemos llamado convención matemática– que puede ser descrito como una manera de pensar que produce conocimiento para dotar de cierta organización a un conjunto de conocimientos. La importancia de nuestros hallazgos descansa en una cierta independencia de los contenidos; pues el funcionamiento de la convención matemática ha sido encontrado en el marco de referentes epistemológicos diversos que a su vez condicionan diversas formulaciones relacionadas con el concepto de exponente no natural.

Un estado del arte relacionado

En términos inmediatamente visibles, nuestros antecedentes deben ser aquellas investigaciones enfocadas a los contenidos de Álgebra (concepto de exponente no natural) o de Cálculo (concepto de función exponencial y logaritmo). En cuanto a las primeras, es significativo que en realidad éstas, hasta donde sabemos, no existan; aun cuando haya una profusa literatura que ha sido enfocada al pensamiento algebraico. En cuanto a las segundas, los referentes que se tienen son aquellas investigaciones que estudian algunos aspectos sobre el desarrollo de la noción de función. Al respecto es posible distinguir dos tendencias de las investigaciones: aquellas que utilizan la hipótesis de que hay un mecanismo único para el desarrollo del pensamiento funcional y aquellas que dotan de particularidades a dicho desarrollo, especialmente a las funciones logaritmo y exponencial.

Con respecto a las investigaciones que utilizan la hipótesis de que hay un mecanismo general para el desarrollo del pensamiento funcional destacamos a las de Sierpinska (1992), Harel y Dubinsky (1992) y Sfard (1992). Así, por ejemplo, Sfard establece un proceso cognitivo caracterizado por las etapas de interiorización, condensación y reificación, partiendo del modelo epistemológico de que la función es una dialéctica entre una faceta operativa y una estructural. En este mismo sentido Harel y Dubinsky caracterizan las construcciones mentales, necesarias para construir el concepto de función, en términos de Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas.

Respecto a la segunda tendencia, su particularidad radica en que elaboran constructos teóricos, que dan cuenta de características específicas para el desarrollo del pensamiento funcional. Con respecto a la función exponencial señalamos las investigaciones de Lezama (1999) y Confrey y Smith (1994, 1995) y acerca de la función logaritmo, la de Ferrari (2001). Confrey & Smith (1994, 1995) centran su atención en describir que es necesario un desarrollo de las estructuras multiplicativas (dejando atrás la preeminencia de las estructuras aditivas) y consideran que ello es posible a través de la elaboración de las nociones de *covariación*[8] y *splitting* (partición de la unidad de referencia). Por su

[8] Se entiende por covariación a la relación existente entre dos formas de variación. En el caso de la función exponencial y logaritmo la covariación es expresada de la siguiente manera: la variación aritmética (la variable toma los valores que corresponden a una progresión aritmética) de una de las

parte Lezama (1999) hace consideraciones análogas a las de covariación cuando atiende, en la situación que diseñó, a las características geométricas de la gráfica de la función exponencial, pues entre sus objetivos se encuentra que los estudiantes se percaten de la particular forma en que las ordenadas se incrementan cuando la abscisa lo hace de manera aritmética. De entre las investigaciones que particularizan el desarrollo de la función logaritmo, es de destacar la de Ferrari (2001). El estudio socioepistemológico profundo que ahí se presenta señala que la vida de una noción matemática es compleja y rica en significados matemáticos y culturales. En particular indica que el desarrollo de los logaritmos puede ser caracterizado por tres etapas: el logaritmo como transformación, como modelizador y como objeto teórico. Es importante subrayar que Ferrari considera como eje central del desarrollo de los logaritmos a la relación entre estas etapas y la covariación.

De entre las investigaciones que dotan de especificidad a la construcción de la función exponencial se observa que el estudio epistemológico de los exponentes no naturales es parcialmente tratado. Si bien, tanto Confrey y Smith como Lezama ofrecen estudios de corte epistemológico, en ellos se percibe, como ya se menciono, que el escenario epistemológico fundamental para el desarrollo de la noción de función exponencial es el de la covariación. En la situación de Lezama (1999) las reglas de transformación son a su vez reglas para la acción de los estudiantes; pues entre el trabajo preliminar que se les pedía desarrollar a los estudiantes y profesores que participaron en las puestas en escena, era precisamente el de manejar las reglas de transformación. Por otra parte Confrey y Smith (1995) se basan en las nociones de *continuidad*, *interpolación* e *isomorfismo* para dar sentido a diversos símbolos formales, por ejemplo, $r^{1/2}$ o $r^{1/3}$. Estos símbolos, realmente, representan la media geométrica y la *tercia geométrica* y que Confrey trabaja implícitamente con la hipótesis de que la noción de exponente no natural surgió para establecer, por interpolación geométrica e isomorfismo, la continuidad, en los números reales, de la progresión geométrica 1, r, r^2, r^3, r^4,... Para entender dicha propuesta, es necesario notar que los esfuerzos de Confrey han sido, principalmente, enfocados para profundizar en lo que puede ser entendido como *variación exponencial* y que el *salto* que Confrey hace hacia el exponente continuo se reduce a un problema de extensión, del tipo que la herencia estructural que dejo Cauchy cuando *deducía* la función exponencial a partir de la hipótesis de continuidad y de que $G(x+y) = G(x)\ G(y)$ para toda x y y.

Todo lo anterior muestra que se ha conformado un consenso entre los investigadores de que el manejo de los exponentes no naturales poseen un único escenario de significación privilegiado que se sustenta en las nociones de covariación, continuidad e isomorfismo.

En investigaciones posteriores Confrey y Dennis (2000) hacen un estudio epistemológico más detallado sobre ‘el surgimiento de los exponentes continuos’ en los trabajos de Wallis. De ese material construimos algunas interpretaciones de corte epistemológico, mostradas con detalle posteriormente, que son el germen de un escenario más rico en significados para la construcción de la noción de exponente no natural que aquel que proponen las investigaciones basadas en la covariación, continuidad e isomorfismo.

---

variables corresponde con una variación geométrica de la otra (la variable toma los valores que corresponde a una progresión geométrica).

Agregado a lo anterior, se puede considerar, en términos generales, que los antecedentes inmediatos con que contamos son aquellas investigaciones que han venido ensayando diversas hipótesis sobre el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional (Cantoral & Farfán, 1998). En particular desde hace algún tiempo se ha percibido la especificidad epistemológica de las funciones trascendentes, cuyo tratamiento escolar es fuente de diversas *dislexias* escolares (Trujillo, 1995; Ferrari, 2001). Es por ello que se han hecho estudios epistemológicos sobre las nociones de función exponencial y logaritmo. En nuestro grupo de investigación hay varios estudios donde se ha profundizado en la construcción social de la función exponencial (Lezama, 1999; Martínez, 2000) y logaritmo (Ferrari, 2001).

En cuanto a los estudios en donde se ha trabajado con la función exponencial, se destaca él de Lezama (1999), porque ahí detectamos algunos fenómenos didácticos que giran alrededor de las respuestas que proporcionan estudiantes al momento de establecer valores para la expresión 2^x (x número entero o racional), así como la falta de argumentos para justificar las respuestas consideradas como correctas. Algunas de las evidencias registradas por Lezama, dan cuenta que tales hechos no permiten la construcción de conocimiento, y en particular, en la construcción de la noción[9] de función exponencial abordada en tal estudio. Esta circunstancia propició plantearnos preguntas sobre la *naturaleza del conocimiento* que establece, por ejemplo que $2^0=1$ y sobre su *vida escolar*. Los primeros avances en esa dirección están reportados por Martínez (2000, 2002). Dos hipótesis son manejadas en estos escritos: que no es un *objeto de enseñanza* y que es una forma de conocimiento cuya naturaleza, que identificamos con el nombre de convenciones matemáticas[10], no puede ser explicada por las teorías que el acercamiento socioepistemológico ha tomado como punto de referencia en épocas recientes: la teoría de Situaciones Didácticas y la teoría de la Transposición Didáctica. Además, la falta de investigaciones que se enfoquen hacia el estudio explícito de convenciones matemáticas, originó nuestro interés por hacer un estudio más detallado en la búsqueda de la explicación sistémica de ciertos fenómenos didácticos. En este sentido, con aquellas investigaciones se aportaron los elementos básicos para entender a profundidad los fenómenos didácticos a que atendieron, al dar cuenta de la complejidad de las relaciones entre el concepto de exponente no natural, el estudiante y el profesor, además de propiciar la discusión sobre el funcionamiento didáctico de las convenciones matemáticas y contribuir al inicio de una línea de investigación, con la que se busca determinar en qué sentido se pueden considerar a las convenciones matemáticas como pieza en la construcción social del conocimiento.

De acuerdo con todo lo anterior, las investigaciones que preceden a la presente asumen que el escenario fundamental para la construcción del exponente no natural es el de la prolongación continua de las relaciones entre la progresión aritmética y geométrica (o la covariación). Si bien eso es cierto, desde el punto de vista estructural, nuestras indagaciones señalan que la existencia de un patrón para que exista la covariación no es el único escenario posible. Más adelante se muestran las evidencias que se han recabado

[9] Aquí una noción matemática es tomada en el mismo sentido que Chevallard (1997) le atribuye en su Teoría de la Transposición Didáctica. Esto es, objetos de conocimiento construidos, susceptibles de ser enseñados y utilizados en aplicaciones prácticas.

[10] En estas investigaciones se utiliza el término convención matemática para especificar aquellos acuerdos que se presentan necesarios para dotar de coherencia interna a una teoría matemática y a su respectivo aparato simbólico y algorítmico. De esta manera se distinguen las convenciones matemáticas de otro tipo de convenciones, como por ejemplo las sintácticas, que se establecen por definición: $2^3=2*2*2$ o $2*3=2+2+2$.

y que permiten aislar un mecanismo común en diversas formulaciones del concepto de exponente no natural; y que permitirán su caracterización del mecanismo. Es de señalar la intención de entender el mecanismo de construcción independiente de contenidos matemáticos, ante la posibilidad teórica de caracterizarlo como un invariante en la construcción social de conocimiento.

Panorama global de la sociogénesis del exponente no natural

Desde el punto de vista sociogénetico, el surgimiento de las reglas de transformación para los exponentes no surgió de preguntarse por el significado de la expresión a^x para un valor arbitrario de x. Se remarca esta aseveración debido a que en la organización escolar tradicional de los saberes, basado en la estructura de los números reales, el problema es reducido a un problema de extensión. Al respecto es notorio observar como el desarrollo de las nociones de función exponencial y logaritmo son indistinguibles y sólo se separan en su inserción como objetos analíticos dentro del paradigma euleriano (Euler, 1845), centrado en la función analítica, en donde la función logaritmo es considerada como la inversa de la función exponencial, y a su vez ésta es definida a través de los convencionalismos presentes en los exponentes; tal y como de manejan hoy en nuestras aulas y libros texto.

A la luz del análisis epistemológico de fuentes históricas se presenta el siguiente esquema de la construcción social del exponente no natural:

- En el marco del pensamiento algebraico la noción de exponente no natural surgió con la intención de preservar la relación entre las progresiones aritmética y geométrica, con el fin de unificar un algoritmo para la multiplicación de monomios.
- En el marco del problema de cuadraturas de curvas existió una auténtica reconstrucción de la convención; ya que emergió como organizadora de las fórmulas de cuadraturas.
- A lo anterior le acompañó una etapa de ocasiones de uso, de las reglas de transformación relacionadas con los exponentes, dentro del pensamiento variacional que permitió la total aceptación de la noción de exponente no natural: cálculo de diferenciales y primitivas en el paradigma leibniziano, el cálculo de fluxiones y momentos en el paradigma newtoniano y la construcción del binomio de Newton. Estos factores ocasionaron que el universo de "curvas algebraicas" (con fórmula) tuviera su centro en expresiones de la forma $f(x)^{m/n}$ (donde $f(x)$ es un polinomio).
- Finalmente hubo un proceso de algebrización.

En este marco de desarrollo es posible centrar la atención en distintas formulaciones que son conceptualmente distintas: 1) Primera sintaxis algebraica (El número como carácter algebraico), 2) Segunda sintaxis algebraica (Recíproco de un monomio es también un monomio), 3) Primera semántica de la cuadratura de las curvas (Índice de las curvas de Wallis), 4) Segunda semántica de la cuadratura de las curvas (Posición relativa del área) y 5) Uso generalizado (Algebrización de las reglas de transformación).

Formulación I. El número como carácter algebraico

En la matemática griega no existió la noción de exponente mayor a 3. Esto debido sobre todo a que las cantidades (lo que tiene medida) están íntimamente ligadas a la geometría y sólo son tratadas las cantidades que representan una magnitud geométrica: longitud, área y volumen en donde se constituye en una semántica geométrica.

Por otro lado se puede encontrar herencia de la semántica geométrica en el contexto algebraico; así las cantidades x, x^2, x^3, x^4, x^5 reciben nombres que remiten al significado geométrico, que respectivamente Vieta llama: (Rojano y Sutherland, 1993, p.121) longitud, plano, sólido, plano plano, plano sólido, sólido plano, plano plano sólido, etcétera. Por su parte Marco Aurel (Meavilla, 1993, p.69) las designa como: *dragma* o número, *rayz* o cosa, *censo cubo*, *censo de censo*, *sursolidum* o *primo relato*, *censo de cubo*, *bissursolidum* o *segundo relato*, *censo de censo de censo*, *cubo de cubo*, etcétera. Desde el punto de vista de la sintaxis algebraica, se puede decir que las primeras formulaciones de los exponentes mayores a tres se encuentran en la etapa de desarrollo conocido como *sincopado*; en donde es necesario apoyarse en otros lenguajes: natural, aritmético o geométrico, semánticamente más ricos, para formular las reglas, para interpretar y resolver los problemas. Con la elaboración de un lenguaje algebraico adecuado, los otros lenguajes se abandonan progresivamente (Rojano y Sutherland, 1993). Es por ello que las primeras formulaciones de los exponentes no naturales no tuvieron trascendencia sino hasta que un nuevo lenguaje entro en el escenario: el lenguaje de las representaciones gráficas de las ecuaciones. Aunque hay referencias aisladas (Cajori, 1928) de que los exponentes fraccionarios (1/2 y 1/3) fueron utilizados en esta etapa, éstas no son lo suficientemente amplias para que puedan ser consideradas aquí.

Dentro del marco de las sintaxis algebraicas, los convencionalismos tienen por finalidad de incluir nuevos objetos algebraicos a la estructura operativa conformada por los diferentes carácteres *cósicos*[11]. En cuanto a la multiplicación, la regla de Aurel se basa en el comportamiento especial de las sucesiones: la relación entre la progresión aritmética y progresión geométrica (relación PA-PG)[12]. Con este marco de referencia se determinan los convencionalismos para incluir al *número* en la estructura operativa del conjunto $\{x, x^2, x^3, x^4, x^5,...\}$, que en la notación de Marco Aurel (Meavilla, 1993) corresponde al conjunto $\{\varphi, \chi, \xi, \zeta, \xi\xi, \beta, \xi\zeta, b\beta, \xi\xi\xi, \zeta\zeta,...\}$. De esta manera el número 5 es representado como 5φ y es multiplicado con los demás a través de una nueva tabla de caracteres cósicos que tienen la misma regla operativa referente a la relación entre la progresión aritmética y geométrica. Lo anterior está expresada en los siguientes términos (Meavilla, 1993, p.72) (se conserva el español original): "Y cuando tu querras multiplicar vna dignidad, grado, o carácter con otro, mira lo que esta encima de cada uno y junta lo simplemente, y aquello que verna, mira encima de qual carácter estara: tal diras que procede de tal multiplicacion". Así al utilizar la Tabla 2 se pueden hacer, por ejemplo, las multiplicaciones contenidas la Tabla 3.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

[11] En el lenguaje moderno se puede identificar estos caracteres cósicos con la segunda potencia, la tercera potencia… de la incógnita.

[12] Es decir, si se coloca la progresión aritmética que representa el número de multiplicaciones de la base y la progresión geométrica que representa las potencias, se tiene que la adición (resta) en la parte superior (la serie aritmética) corresponde a la multiplicación (división) de la serie de abajo (geométrica):

2,	3,	4,	5,	6,
4,	8,	16,	32,	64,

A la relación expresada en el enunciado anterior la abreviaremos, en lo sucesivo, como *la relación entre la progresión aritmética y geométrica* (relación PA-PG).

φ	χ	ξ	ζ	ξξ	β	ξζ	*b*β	ξξξ	ζζ

Tabla 2. Caracteres cósicos de Aurel y la relación PA-PG

Notación de Aurel	
8ξ 2χ ------ 16ζ	23β 4φ -------- 92β
13ξξ 2ξξ -------- 26ξξξ	50φ 6ξ -------- 300ξ

Tabla 3. Multiplicaciones en la notación de Aurel

En el marco de esta primera formulación algebraica los cocientes del tipo x^5/x^7, es decir, donde el grado del dividendo es menor que el del divisor, no son incluidos como caracteres cósicos; ya que, como remarca Meavilla (1993, p.74), Marco Aurel "sólo considera para la división el caso en que el dividendo y el divisor son monomios, distinguiéndose dos posibilidades: 1) el grado del dividendo en menor que el del divisor y 2) el grado del dividendo es mayor que el del divisor. En la primera posibilidad *tal partición no se podrá partir y quedará como quebrado*; en la segunda, la regla de Aurel coincide con la actual ($a^m/a^n=a^{m-n}$ con $m>n$)" (las cursivas son nuestras).

En lo anterior se han descrito las factores generales que dieron origen a la emergencia de la "potencia cero" (en términos del lenguaje moderno), representado por el signo φ aunque no sea identificado con el número uno, en el marco de la primera sintaxis algebraica. Para completar este cuadro explicativo a continuación se hace una enumeración de los significados entran en juego para el funcionamiento del mecanismo de convención matemática:

- Abandono de la interpretación geométrica para concebir las potencias mayores a tres.

- Con la utilización de las relaciones entre la progresión aritmética y la progresión aritmética, los caracteres cósicos: χ, ξ, ζ, ξξ, β, ξζ, *b*β, ξξξ y ζζ son interpretados como *objetos algebraicos*.

- La centración es puesta en la *estructura operativa cerrada* (multiplicación y división) de los objetos algebraicos. Tal estructura puede ser resumida como:

    - (Potencia de x)(Potencia de x) = (Potencia de x)
    - (Potencia de x)/(Potencia de x) = (Potencia de x)

- La emergencia de la "potencia cero" viene determinada por la intención de incluir a los números en tal estructura operativa relativa a la multiplicación.

Formulación II. Recíproco de un monomio es también un monomio

Lo que también hemos denominado también como *segunda sintaxis algebraica*, se encuentra en un contexto donde el progreso en la operatividad con los números negativos y el cero (Gallardo, 1993) hace posible la inclusión de los cocientes $1/x$, $1/x^2$,.... entre los caracteres cósicos y su operatividad. La formulación surge de admitir la operatividad de cantidades negativas para después enmarcarlas en la estructura algorítmica de la relación entre la progresión aritmética y geométrica. Chuquet en *La triparty en la Science des Nombres* (documento fechado en 1484) construyó una noción de exponente cero y negativo (al parecer no utilizó exponentes fraccionarios). Al respecto Paradís (1993) señala:

> "Chuquet explica que cada número puede considerarse como cantidad estricta, y así para indicarlo, se puede añadir un cero en la parte superior del número, como por ejemplo 12^0, 13^0 para indicar 12 o 13. Pero cada número puede considerarse como número primero de una cantidad continua, también dicho número lineal, indicando así: 12^1, 13^1... o bien número superficial cuadrado: 12^2, 13^2 ... y así sucesivamente hasta el orden que se quiera (12^0 quiere decir doce; 12^1 indica $12x$; 12^2 significa $12x^2$,...)."

Es importante señalar que el superíndice cero que utiliza Chuquet significa "ausencia de variable". Unas páginas después Paradis afirma:

> "Chuquet opta resueltamente, desde el primer momento, por abandonar las distintas nomenclaturas para designar el orden de las raíces, así como el de las potencias de la incógnita, *para exponer una forma de denominación unificadora, que facilite las operaciones entre estas entidades.* " (las cursivas son nuestras).

De esta manera Chuquet[13] (Struik, 1986, p.61), opera de la siguiente manera: (Chuquet utiliza $.7^{1.\tilde{n}}$. para denotar $7/x$).

> How to multiply a difference of number [une difference de nombre] by itself or by another similar o dissimilar to it.
>
> Example. He who multiplies $.12^0$. by $.12^0$. obtains .144., then he who adds .0. to .0. obtains .0.; hence multiplication gives .144..
>
> Then He who multiplies $.12^0$. by $.10^2$.has first to multiply .12. by .10., which gives .120. and then .0. must be added to .2.. Thus the multiplication will give 120^2 By the same reasoning he who multiplies $.5^1$.by $.8^1$.obtains the multiplication $.40^2$..
>
> He who also wants to multiply $.12^3$.by $.10^5$.must first multiply .12. by .10., obtains .120., then must add the denominates together, which are .3. and .5., giving .8. Hence the multiplication gives $.120^8$..

[13] El contexto de la formulación está relacionada con las soluciones negativas que resultan de la resolución formal de ecuaciones lineales. Es por ello que al parecer uno de los objetivos de la aceptación de los exponentes negativos era dar legitimidad a los números negativos y su operatividad, pues eran usados para la operatividad consistente con los monomios.

Also he who wants to multiply $.8^{1}$.by $.7^{1.\tilde{n}}$. obtains as multiplication .56., then he who adds the denominations together will take 1.*p* with .1*ñ* and obtains the multiplication $.56^{0}$..

Similarly, he who would multiply $.8^{3}$. by $.7^{1.\tilde{n}}$.will find it convenient first to multiply .8. by .7.. He obtains .56. then he most add the denominations, and will take 3.*p* with .1.*ñ* and obtain .2.. Hence the multiplication gives $.56^{2}$. and this way we must understand other problems.

En lo anterior se han descrito los factores generales que dieron origen a la emergencia de la operatividad con monomios. Para completar este cuadro explicativo a continuación se hace una enumeración de los significados entran en juego para el funcionamiento del mecanismo de convención matemática:

- Pregunta básica ¿qué se debe hacer para que la estructura operativa determinada por la relaciòn PA-PG se *conserve* en casos como los siguientes?:

  - *Emergencia del concepto del exponente uno*:
    (4ª potencia de x) / (3ª potencia de x) = (¿Qué potencia de x?)
  - *Emergencia del concepto de exponente cero*:
    (2ª potencia de x) / (2ª potencia de x) = (¿Qué potencia de x?)
  - Emergencia del concepto de exponente negativo
    (3ª potencia de x) / (4ª potencia de x) = (¿Qué potencia de x?)

- Es necesario verificar que con los convencionalismos establecidos se preserva la estructura multiplicativa, lo cual sólo tiene sentido si se posee cierta operatividad con los números negativos (por ejemplo 5+(-3)). También puede plantarse la hipótesis inversa: los convencionalismos obtenidos y la necesidad de preservar la estructura multiplicativa ocasionan cierta operatividad con los números negativos. La hipótesis anterior alcanza su verdadero sentido al observar que para establecer los convencionalismos no es necesario una verdadera operatividad con los números negativos, ya que éstos pueden ser establecidos con operaciones del tipo 3 - 5 = -2, que tienen un significado más rico (deuda, izquierda, entre otros) y que no involucran necesariamente el manejo de -5 como objeto matemático.

- En esta dirección, es posible explicar los motivos de que, por ejemplo, la raíz cuadrada no fue sometida o sometida marginalmente al mecanismo para incluirla en las potencias de la incógnita: las raíces poseen una operatividad independiente totalmente satisfactoria.

- Sin embargo estos convencionalismos fueron parte marginal de la sintaxis algebraica o del estudio de la cosa o los caracteres *cósicos*; debido, fundamentalmente, a que no tenían sentido fuera del contexto algebraico.

Formulación III. Índice de las curvas de Wallis

En lo referente a esta formulación, se consideran las interpretaciones hechas por John Wallis en su trabajo del cálculo de cuadraturas. Esta formulación, junto con la siguiente, se caracteriza por el surgimiento de una nueva representación, la cual proporciona una semántica para los objetos algebraicos: la representación cartesiana de las relaciones algebraicas.

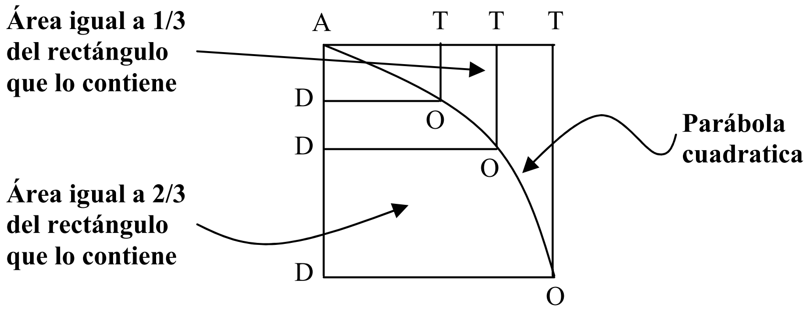
Wallis se basa, para hallar áreas, en el método de los indivisibles de Cavalieri, es decir, él considera una superficie como la suma de un número infinito de segmentos de líneas paralelas y a un volumen como la suma de un número infinito de porciones de planos paralelos. Es a través de este método que determina que es posible resolver distintos problemas de cálculo de áreas y superficies a través de razones aritméticas de la forma:

$$\frac{0^k + 1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^k + n^k + n^k + \ldots + n^k}$$

Wallis (Confrey y Dennis, 2000) investigó el comportamiento de estas razones cuando el valor de n se incrementa para k=1,2,3,4 y 5, y utiliza las fórmulas, no demostradas por él, de las sumas $0^k+1^k+2^k+\ldots+n^k$ (k=1,2,3,4 y 5) para establecer el límite siguiente (por decirlo en términos modernos):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{0^k + 1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^k + n^k + n^k + \ldots + n^k} = \frac{1}{k+1} \quad (k=1,\ 2,3,4,5)$$

A tales límites Wallis los nombra *razones características* de *índice* 1, 2, 3, 4 y 5, según sea el valor de k. A partir de estas consideraciones hace la afirmación general de que la razón característica de índice k es $1/(k+1)$ para todos los enteros positivos. En particular la razón característica de índice 2, es decir 1/3, proporciona la razón existente entre la porción parabólica y la porción rectangular que la contiene.



Consideraciones sobre el complemento de las áreas de las gráficas $y=x^k$, (k entero positivo) sugirió a Wallis el concepto de índice fraccionario. Así, debido a que el área bajo la curva $y=\sqrt{x}$ es el complemento del área bajo $y=x^2$ debe tener una razón característica de 2/3=1/(1+1/2) por lo que el índice de $y=\sqrt{x}$ debe ser 1/2. Lo mismo puede verse para $y=\sqrt[3]{x}$, cuya razón característica debe ser 3/4=1/(1+1/3) por lo que su índice será 1/3.

Esta misma interpretación le permite a Wallis darle un significado al exponente cero (Confrey y Dennis, 2000): “Debido a que $y=x^0$ debe tener una razón característica de 1, debe ser una línea horizontal. Debido a que 1 elevado a cualquier potencia es 1, esta línea horizontal debe estar a la altura de 1”. Es significativo señalar aquí que de lo anterior se deduce que $0^0 = 1$.

A continuación Wallis afirma (Confrey y Dennis, 2000) que el índice apropiado de $y = \sqrt[q]{x^p}$ debe ser *p/q* y que su razón característica es 1/(1+*p*/*q*); pero al no tener manera de verificar directamente la razón característica de tales índices, por ejemplo de $y = \sqrt[3]{x^2}$, Wallis retoma el principio de *interpolación* el cual afirma que cuando se puede discernir un patrón de cualquier tipo en una sucesión de ejemplos, uno tiene el derecho de aplicar ese patrón para cualesquiera valores intermedios. En el caso que interesa, él hace la siguiente tabla de razones características conocidas [R(i/j) denota la razón característica, desconocida, de índice i/j]:

q/p	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1=1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8
2	1=2/2	2/3	2/4	**R(3/2)**	1/3=2/6	**R(5/2)**	1/4=2/8	**R(7/2)**
3	1=3/3	3/4	**R(2/3)**	1/2=3/6	**R(4/3)**	**R(5/3)**	1/3=3/9	**R(7/3)**
4	1=4/4	4/5	2/3=4/6	**R(3/4)**	1/2=4/8	**R(5/4)**	**R(3/2)**	**R(7/4)**
5	1=5/5	5/6	**R(2/5)**	**R(3/5)**	**R(4/5)**	1/2=5/10	**R(6/5)**	**R(7/5)**
6	1=6/6	6/7	3/4=6/8	2/3=6/9	**R(2/3)**	**R(5/6)**	1/2=6/12	**R(7/6)**
7	1=7/7	7/8	**R(2/7)**	**R(3/7)**	**R(4/7)**	**R(5/7)**	**R(6/7)**	1/2=7/14
8	1=8/8	8/9	4/5=8/10	**R(3/8)**	2/3=8/12	**R(5/8)**	**R(3/4)**	**R(7/8)**
9	1=9/9	9/10	**R(2/9)**	3/4=9/12	**R(4/9)**	**R(5/9)**	**R(2/3)**	**R(7/9)**

Al aplicar el principio de interpolación sobre la fila 5 se puede conjeturar, por ejemplo, que R(3,5)=5/8 y sobre la columna 3 que R(3,5)=5/8. Razonamiento semejante se puede hacer sobre la fila 10 para establecer que R(3,5)=10/16 y sobre la columna 6 que R(3,5)=10/16. Este tipo de razonamientos, que no llevan a una contradicción, le permitieron a Wallis llenar la tabla de la siguiente manera (se han resaltado aquellas razones características que surgen del principio de interpolación) (Struik, 1986):

q/p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1/1	1/2	1/3	¼	1/5	1/6	1/7	1/8	1/9	1/10
2	2/2	2/3	2/4	**2/5**	2/6	**2/7**	2/8	**2/9**	2/10	**2/11**
3	3/3	3/4	**3/5**	3/6	**3/7**	**3/8**	3/9	**3/10**	**3/11**	3/12
4	4/4	4/5	4/6	**4/7**	4/8	**4/9**	**4/10**	**4/11**	4/12	**4/13**
5	5/5	5/6	**5/7**	**5/8**	**5/9**	5/10	**5/11**	**5/12**	**5/13**	**5/14**
6	6/6	6/7	6/8	6/9	**6/10**	**6/11**	6/12	**6/13**	**6/14**	**6/15**
7	7/7	7/8	**7/9**	**7/10**	**7/11**	**7/12**	**7/13**	7/14	**7/15**	**7/16**
8	8/8	8/9	8/10	**8/11**	8/12	**8/13**	**8/14**	**8/15**	8/16	**8/17**
9	9/9	9/10	**9/11**	9/12	**9/13**	**9/14**	**9/15**	**9/16**	**9/17**	9/18

Wallis también interpreta (Confrey y Dennis, 2000) a los números negativos como índices. Define el índice de $1/x$ como -1, el índice de $1/x^2$ como -2, etc. También extiende esta definición a las fracciones[14]: por ejemplo, $1/\sqrt{x}$ tiene un índice de -1/2. Después establece que la relación entre el índice y la razón característica sigue siendo válida para esos índices negativos. Esto es, si *k* es un índice entonces 1/(*k*+1) es la razón del área sombreada bajo la curva hasta el rectángulo. En el caso de un índice negativo, esta área sombreada no es acotada (hecho que Wallis conocía como lo muestran los siguientes párrafos). Esto no impide que Wallis generalice su afirmación.

[14] Deseamos aclarar que a través de la literatura consultada no fue posible determinar claramente los motivos que tuvo Wallis para realizar hacer tales definiciones; pero es de suponer que fueron tomadas de las convenciones algebraicas que se han detallado con anterioridad.

Cuando k=-1 la razón característica debe ser $\frac{1}{-1+1}=\frac{1}{0}=\infty$[15]. Wallis aceptó este cociente como razonable debido a que el área bajo la curva 1/x diverge; el cual, al parecer, era un hecho conocido en la época.

Cuando k=-2, la razón característica debe ser 1/(-2+1)=1/-1. Aquí, la concepción de Wallis sobre la razón difiere de la aritmética moderna de números negativos. Él no cree que 1/-1 = -1, más bien, se queda con su epistemología de representaciones múltiples. Debido a que el área sombreada bajo la curva $y=1/x^2$ es más grande que el área bajo la curva 1/x, concluye que la razón 1/-1 es mayor que infinito (*ratio plusquam infinita*). Continúa concluyendo que 1/-2 es incluso más grande. Esto explica el plural en el título de su tratado *Arithmetica Infinitorum*, de la cual, la traducción más adecuada sería La Aritmética de los Infinitos.

Es importante señalar que de acuerdo con Confrey y Dennis (2000): "Wallis continuó afirmando que esto era cierto incluso cuando el índice es irracional. Analizó un ejemplo así, cuando el índice es igual a $\sqrt{3}$". Aunque no se tuvo acceso al trabajo original de Wallis creemos que este pasaje es de particular interés por dos motivos: a) Desde la perspectiva de la construcción de los convencionalismos de los exponentes de acuerdo con la relación entre la progresión aritmética y geométrica, el exponente $\sqrt{3}$ no puede ser formulado; ya que este número no puede ser parte de una progresión aritmética entre 1 y 2 (de lo contrario tendría que existir un entero k que cumpla $k(\sqrt{3}-1) = 2$ lo cual no es posible) y b) la existencia de una curva de índice $\sqrt{3}$ puede ser interpretada cómo la existencia de una curva de razón característica $1/(1+\sqrt{3})$ que puede ser representada en el contexto de las cuadraturas.

Formulación IV. Posición relativa del área

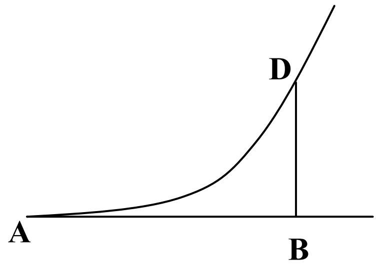
Al parecer la influencia que tuvieron las interpretaciones de Wallis fue poca, ya que trabajos posteriores muestran una interpretación gráfica del cálculo que no involucraba la consideración de *infinitos*. Esta nueva interpretación permite uniformizar la fórmula del cálculo de las cuadraturas a través de la posición relativa en que se localiza el área calculada. A manera de ejemplo consideremos el desarrollo que hizo Newton (1669). En primer lugar establece la fórmula general:

> Para la base AB de alguna curva dejemos que la ordenada BD sea perpendicular y dejemos AB como x y BD como y. Sean *a, b, c*... cantidades dadas y *m, n* enteros. Entonces
>
> Regla I (cuadratura de curvas simples). Si $ax^{m/n} = y$, entonces $\frac{na}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$ es igual al área de ABD.
>
> Esto es evidente en los ejemplos.

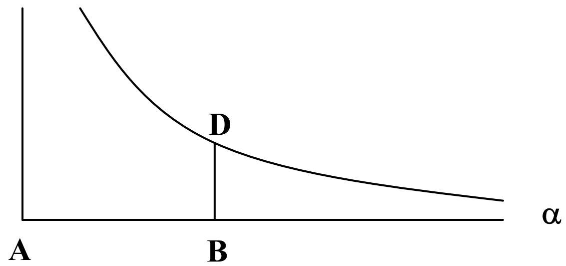
[15] Lo que hoy se entiende por fracciones, en la época de Wallis se concebía como proporcionalidad por lo que 1 es 0 (nada) como ∞ es a 1.

[...]

Ejemplo 2. Si x^2 $(= 1\times x^{\frac{2}{1}}) = y$, entonces $\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}(= \frac{8}{3}\sqrt[2]{x^3}) =$ ABD.



[...]

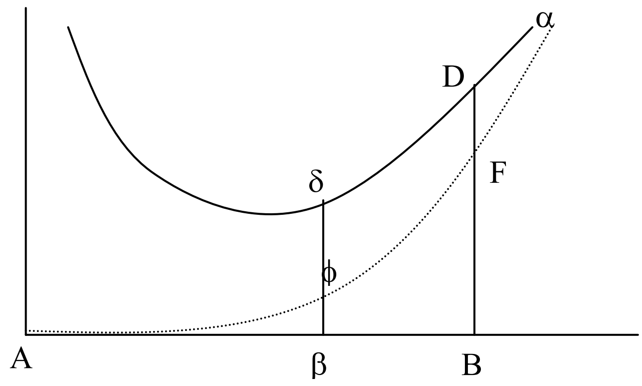


Ejemplo 4. Si $(1/x^2)$ $(= x^{-2})$ = y, esto es si a = n = 1 y m = -2, entonces $\left([1/-1]x^{-\frac{1}{2}} = \right) - x^{-1}(= -[1/x]) = \alpha\text{BD}$ infinitamente extendida en la dirección de α: el cálculo toma su signo negativo debido a que es tomado del otro lado de la línea BD.

Posteriormente Newton, en su *De Analysi per equationes infinitas* (Newton, 1669), permite que un área esté *compuesta por áreas parabólicas o hiperbólicas* al efectuar la siguiente interpretación (que en sí misma refleja el funcionamiento del mecanismo de convención matemática):

Tercer ejemplo (de la Regla 3): Si x^2+x^{-2}=y, entonces (1/3)x^3-x^{-1}=la superficie descrita. [AB=x y BD=y]

Pero aquí se debe notar que las partes de tal superficie se encuentran en lados opuestos de la línea BD: Precisando, dejando BF=x^2 y FD=x^{-2}, entonces (1/3)x^3=la superficie ABF descrita por BF y –x^{-1}=DFα descrita por DF. Y esto siempre ocurre cuando los índices (m+n)/n de las razones de la base x en el valor de la superficie sea afectada por diferentes signos. En estos casos cualquier superficie intermedia BDδβ (y no puede ser otro caso pues la superficie es infinita en otro lado) puede ser encontrada de la siguiente manera. Substraer la superficie relativa a la base Aβ de la superficie relativa a la base AB y se tiene la superficie βBDδ que queda sobre la diferencia de esas bases. [...] De la misma manera si Aβ=1 y AB=x, entonces βBDδ=2/3+(1/3)x^3-x^{-1}.



Significados en juego en las semánticas de la cuadratura de las curvas

- La aparición de una representación gráfica donde se utiliza a la sintaxis algebraica como saber de referencia, ocasiona que los convencionalismos algebraicos sean readaptados. Por un lado, éstos no pueden ser abandonados, ya que ello sería lo mismo que perder un conocimiento aceptado; por lo que es necesario, si es posible, efectuar interpretaciones que *no lo contradigan*. Si es abandonado el conocimiento anterior, deberá ser por razones poderosas o casi inevitables (por ejemplo, los logaritmos de los números negativos). En este sentido el mecanismo de convención matemática tiene por objetivo lograr una *coordinación* o *integración sistémica* de las representaciones.

- Una parte de extensa semántica de los números negativos es recuperada, la noción de *negatividad* es puesta en funcionamiento en el campo de las proporciones como *carencia* y como *estar a la izquierda* en la representación gráfica. En este mismo sentido, los índices de las curvas están íntimamente ligadas a la razón característica, que es una proporción entre áreas. A través de estas interpretaciones (como una realización del mecanismo de convención matemática) que tienen como propósito buscar que un *solo* algoritmo que funcione para el cálculo de cuadraturas de todas las curvas algebraicas conocidas, en tanto la ecuación que la representaba.

- Hay dos diferencias sustanciales entre las dos versiones de esta nueva interpretación: en la de Wallis, las razones en donde el *denominador* es negativo se puede observar que no admite la operación división, mientras que en la de Newton si se hace. Este hecho, entre otros, ocasiona que se presenten dos versiones de funcionamiento del mecanismo:

  - Paráfrasis del razonamiento de Wallis: La curva de índice p, $y = x^p$ (p entero positivo) tiene una razón característica de $1/(1 + p)$. Se sabe que la razón característica de la curva $y = \sqrt[p]{x}$ (p entero positivo) es $1\text{-}1/(1 + q)=1/(1 +1/q)$ entonces para preservar esta estructura la curva *debe* tener índice $1/p$. Aunque no se sabe cuál es la razón característica de la curva $y = \sqrt[q]{x^p}$ es de esperarse que sea $1/(1 + p/q)$. Se sabe, además, que la cuadratura de la curva $y = 1/x$ es infinita, esto puede interpretarse ya que por Álgebra se sabe que su índice es -1 por lo que su razón característica es $1/(1\text{-}1) = 1/0 =$ infinito. De manera análoga se puede interpretar que la curva $y = 1/x^2$ es 1/(1-2)=1/-1 = un infinito más grande que el anterior.

- Paráfrasis del razonamientos de Newton: Se sabe que la curva $x^{m/n} = y$, tiene área $\frac{n}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$ (m, n enteros positivos). Además, por el Álgebra, se sabe que la expresión $y = 1/x^2$ puede ser reescrita como $y = x^{-2/1}$ por lo que *se puede* escribir que su área es igual a $\frac{1}{-2+1}x^{\frac{1}{-2+1}} = -1x^{-1} = \frac{-1}{x}$. El signo negativo *puede* ser interpretado como el área infinitamente extendida del lado opuesto que en los casos anteriores, ya que $1/x$ es efectivamente el valor de esa área.

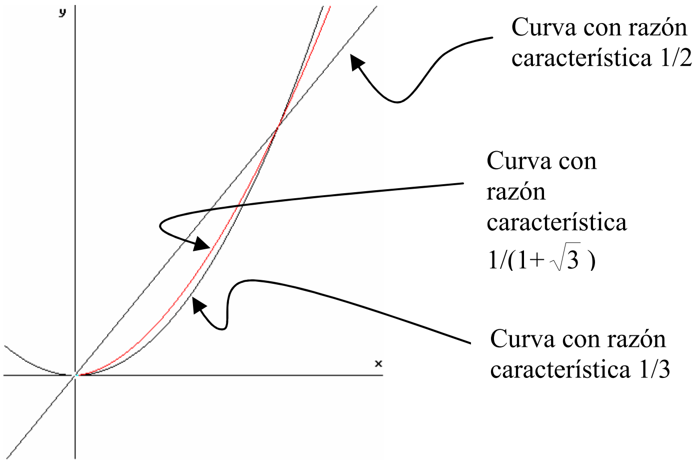
- La existencia de curvas con una razón característica dada es *evidente* en el contexto algebraico. En este sentido surge una pregunta: De entre las curvas con razón característica 2/3 = 1/(1+1/2) ¿cuál elegir como la *principal* y designarla como curva de índice 1/2? Aquí resulta importante determinar el universo gráfico y algebraico en donde está inmersa la pregunta. En el caso del escenario donde se desenvuelve Wallis se puede decir, de acuerdo con Bos (1975) y con Youschkevitech (1976), que su universo gráfico está compuesto por curvas algebraicas y geométricas[16,17]. Sin lugar a dudas las curvas privilegiadas son las algebraicas (debido a que con ellas es posible aplicar los métodos algebraicos) y estás son, para Wallis, de la forma $y = \sqrt[n]{(p(x))^m}$ donde $p(x)$ es un polinomio. Entonces el camino es determinar cuál de las curvas algebraicas tiene razón característica 2/3, para afirmar que *es la* curva de índice 1/2, en este caso la curva $y = \sqrt{x}$. Esta determinación, además, no contradice el contexto algebraico.

- El hecho que Wallis propusiera la existencia de una curva de índice $\sqrt{3}$ llama la atención hacia el carácter de *herramienta* de la noción de razón característica de una curva para construir funciones. En el ejemplo considerado se puede razonar de la siguiente manera: ya que la razón característica de una curva es una proporción, puede tener un valor arbitrario, por ejemplo 1/(1+$\sqrt{3}$), y asumirse la existencia de una curva de índice $\sqrt{3}$ y si a esto se agrega un *principio de interpolación en las gráficas* se puede suponer que se comportara como las otras curvas de índices entero o racional; por ejemplo, siempre crecientes, sin puntos de inflexión, entre otras, y

[16] "*La relación entre variables [ordenada, abscisa, radio, subtangente, entre otras] eran expresadas, cuando era posible por medio de ecuaciones. Esto no era siempre posible, ya que justo antes del final del siglo XVII no existían formulas para las relaciones trascendentes y éstas eran expresadas por medio de prosas explicativas que básicamente expresaban el método geométrico para la construcción de la curva*" (Bos, 1975).

[17] "*Un poco más adelante, Descartes establece una clase especial: la de las curvas algebraicas (a las que denomina curvas geométricas). Todos los puntos de estas curvas, según observó Descartes, guardan cierta relación con todos los puntos de una línea recta, y es posible representar esta relación mediante alguna ecuación, que es la misma para cada punto de una determinada curva. Al decir ecuación, Descartes, que no tenía medios para escribir simbólicamente ecuaciones de ninguna otra especie, en realidad se refería a una ecuación algebraica. Denominando curvas mecánicas a las de naturaleza no geométrica, Descartes pasa inmediatamente a introducir su clasificación; todavía no perfecta, de las curvas geométricas en géneros (*genres*), siendo las del primer género aquellas descritas por ecuaciones de segundo grado; del segundo género las descritas por ecuaciones de tercero y cuarto grados, del tercer género, por ecuaciones de quinto y sexto grados, etc.*" (Youschkevitech, 1976).

además, su gráfica se encontrará *entre* las gráficas de las curvas de razón característica 1/(1+1) y 1/(1+2); es decir, entre las gráficas de la funciones $f(x)=x$ y $g(x)=x^2$.



Formulación V. Algebrización de las reglas de transformación

En términos generales es posible distinguir dos momentos en la transposición hacia la *algebrización* de los exponentes no naturales. En primera instancia el mecanismo funciona con nociones comúnmente utilizadas en distintas épocas como lo son las progresiones aritméticas y geométricas, que a su vez surgen de nociones básicas como multiplicar y sumar, y en un segundo momento este proceso deviene en la centración en las *leyes de los exponentes,* que representan la versión sintética de la relación entre la progresión aritmética y geométrica; pero que ya no hace referencia a esta relación. En la siguiente tabla se presentan los diferentes matices encontrados en la presentación y justificación para la introducción de los exponentes no naturales en las obras de antaño consultadas:

Libro	**Argumento para introducir exponentes no naturales**	**Argumento para introducir el exponente cero**
Analyse des infiniment petits… (L'Hospital, 1998)	Y si se continúa la progresión geométrica por debajo de la unidad, y la aritmética por debajo del cero, los términos de ésta serán los exponentes de aquélla y se corresponderán. De este modo, -1 es el exponente de $1/x$; -2 es el exponente de $1/x^2$; etcétera.	Si se propone una progresión geométrica en la que el primer término sea la unidad, y el segundo una cantidad cualquiera x, y si en orden se dispone bajo cada término a su exponente, es claro que estos exponentes formarán una progresión aritmética.
Elementos de Álgebra (Euler, 1984)	Se puede continuar la serie de potencias en un orden retrógrado de dos maneras diferentes; primero dividiendo siempre por a y segundo disminuyendo el exponente una unidad. Es evidente que, si se sigue de una u otra manera los términos son perfectamente iguales.	…Esto muestra que el término que precede al primer término debe ser necesariamente a/a, o uno, y si se procede de acuerdo con los exponentes, se puede concluir inmediatamente que el término que precede al primero debe ser a^0; y entonces se deduce la notable propiedad de que a^0 es siempre igual a 1, ya sea el valor de grande o pequeño, e incluso cuando es nada;

		hay que decir que a^0 es igual a 1.
Elements d'Algèbre (Bourdon, 1848)	A menudo se llega a situaciones en donde los exponentes de ciertas letras es menor en el dividendo que en el divisor.	A menudo se llega a situaciones en donde los exponentes de ciertas letras son las mismas tanto en el dividendo como en el divisor.
Tratado de Álgebra elemental (Contreras, 1880)	Vamos a demostrar que $$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$$ Como el valor representado por a^{-p} no se altera cuando se multiplica y se divide por una misma cantidad, tendremos que: $$a^{-p} = \frac{a^{-p} \times a^p}{a^p} = \frac{a^0}{a^p}$$ luego $$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$$ que es lo que se quería demostrar.	Toda cantidad elevada a cero es igual a la unidad. Si dividimos, por ejemplo, a^m por a^m, como toda cantidad dividida por sí misma da por cociente la unidad, tendremos $\frac{a^m}{a^m} = 1$. Por otra parte, se ha visto que para dividir literales deben restarse sus exponentes, por lo cual $\frac{a^m}{a^m} = a^0$; luego $a^0 = 1$.

Síntesis metódica

La acepción aquí utilizada para convención es la que señala aquello que es conveniente para algún fin específico; entonces una convención matemática es una conveniencia para las matemáticas. Al respecto las formulaciones descritas anteriormente muestran la presencia de un mecanismo uniforme de construcción de conocimiento. Se puede resumir que: *el significado de los exponentes no naturales es* <u>convenido</u> *para posibilitar la construcción de cuerpos unificados y coherentes de conocimiento* <u>matemático</u> *(es decir para la integración sistémica de conocimientos)*. Es por ello que de manera sintética designamos al mecanismo con la expresión: *convención matemática*. Las formas o realizaciones de este mecanismo pueden ser una definición, un axioma, una interpretación, o una restricción, entre otras. La elección de la forma depende de la naturaleza teórica de la organización de conocimientos. La fuente de todo lo anterior es un principio implícito de racionalidad que establece que en matemáticas se busca el mayor grado de unidad al momento de incluir nuevos objetos matemáticos a su cuerpo de conocimientos. En términos de la perspectiva social que se quiere atender; este principio puede ser interpretado como un consenso que establece que un conocimiento es válido si con él se atiende a cierta unidad de un sistema de conocimientos.

Teóricamente, desde un principio, la búsqueda de integración, que es una búsqueda de relaciones, puede tener dos salidas: 1) La *ruptura* ocasionada por dejar a un lado un significado por otro que eventualmente es construido para la tarea de integración; es decir cambiar la centración de significado y 2) La *continuidad* al conservar un significado en la tarea de integración. Entonces la convención matemática, en tanto producto, puede ser interpretada como una propiedad emergente para establecer una relación de continuidad o de ruptura de significados.

Dentro del marco de las formulaciones algebraicas, los convencionalismos tienen por finalidad incluir nuevos objetos algebraicos a la estructura operativa conformada por los diferentes caracteres *cósicos*. La estructura operativa está basada en las relaciones entre la progresión aritmética y geométrica. En la primera sintaxis algebraica se determinan los convencionalismos para incluir al *número* en la estructura operativa del conjunto $\{x, x^2, x^3, x^4, x^5,...\}$. De esta manera se construye un símbolo especial φ que tiene la propiedad del neutro multiplicativo, aunque éste no sea identificado con el 1. El número 5, entonces, es repesentado como 5φ. En el marco de esta primer sintaxis algebraica los cocientes del tipo x^5/x^7, es decir, donde el grado del dividendo es menor que el del divisor, no son incluidos como caracteres cósicos ya que, como remarca Marco Aurel *tal partición no se podrá partir y quedará como quebrado*. Este hecho señala una diferencia sustancial con la segunda sintaxis algebraica, en donde el progreso en la operatividad con los números negativos hace posible tal inclusión, pues se establecen los convencionalismos para incluir a los cocientes $1/x$, $1/x^2$,.... entre los caracteres cósicos y su operatividad. Al parecer, por el contexto de tal formulación debida a Chuquet, uno de los objetivos de esta inclusión era dar legitimidad a los números negativos. En resumen, se puede decir que en el marco del pensamiento algebraico la noción de exponente no natural surgió por la intención de preservar la operatividad de los caracteres cósicos al momento de incluir objetos matemáticos nuevos, a través de un mecanismo de convención matemática.

La aparición de una representación gráfica, que utiliza la sintaxis algebraica como saber de referencia, ocasiona que los convencionalismos algebraicos sean revisados. Éstos no pueden ser abandonados, ya que ello sería lo mismo que perder un conocimiento útil y aceptado; por lo que es necesario, si es posible, construir interpretaciones que *no lo contradigan*. Si se abandona el conocimiento anterior, debe ser por razones poderosas o casi inevitables (como sucedió, por ejemplo, con los logaritmos de los números negativos). En este sentido, el mecanismo de convención matemática debe ser puesto en funcionamiento con el objetivo de lograr una *coordinación* o *integración sistémica* de las representaciones. Es por ello que parte de la rica semántica de los números negativos es recuperada; por ejemplo, la noción de *negatividad* es puesta en funcionamiento en el campo de las proporciones como *carencia* y como *estar al otro lado* en la representación gráfica. En este mismo sentido, los índices de las curvas, construidos por Wallis, estaban íntimamente ligados a la razón característica (una proporción entre áreas). Estas interpretaciones tenían como propósito que un *solo* algoritmo funcionará para el cálculo de cuadraturas de todas las curvas algebraicas conocidas, en tanto la ecuación que la representaba.

Finalmente es posible notar el uso generalizado de las reglas de transformación. Este proceso conlleva su transposición hacia la *algebrización*; es decir, que el contexto privilegiado para su tratamiento es el algebraico. Este proceso de transposición resulta particularmente apto para las restricciones de una emergente organización teórica; ya que el Álgebra es económica en cuanto a representaciones y sobre todo considerada como el corpus de conocimiento básico en matemáticas. En términos generales es posible distinguir dos momentos en la transposición hacia la *algebrización* de los exponentes no naturales. En primera instancia el mecanismo funciona con nociones comúnmente utilizadas en distintas épocas como lo son las progresiones aritméticas y geométricas, que a su vez surgen de nociones básicas como multiplicar y sumar, y en un segundo momento este proceso deviene en la centración en las *leyes de los exponentes*[18], que representan la versión sintética de la relación entre la progresión aritmética y geométrica; pero que ya no hace referencia a esta relación.

A manera de conclusión

[18] Es decir: 1) $A^nA^m=A^{n+m}$, 2) $A^n/A^m=A^{n-m}$ y 3) $(A^n)^m=A^{nm}$.

Aquí se ha descrito un mecanismo que construye los significados y funcionalidad de los convencionalismos relativos a los exponentes. El interés fundamental fue la de mostrar que cada una de las formulaciones encontradas pueden ser descritas y explicadas a través de un mecanismo constructivo común: la *convención matemática*. Para ello se presentaron los detalles del análisis que permite proporcionar una caracterización del mecanismo desde la sociogénesis; que da cuenta de la complejidad de las interacciones existentes entre diversos sistemas de nociones y conceptos matemáticos que en cierto momento son considerados independientes. El esfuerzo por unificar estos sistemas, con base a principios metamatemáticos o para evitar contradicciones entre ellos, es lo que determina el funcionamiento del mecanismo y consecuentemente posibilita la construcción de conocimiento. En términos funcionales la realización del mecanismo son propiedades emergentes (es decir, que no estaban presentes en los sistemas iniciales), bajo la forma de axiomas, definiciones, restricciones, entre otras.

Citemos como ejemplos, que resaltan los elementos fundamentales utilizados para la caracterización del mecanismo, a las formulaciones hechas por Wallis y Newton en el marco del cálculo de cuadraturas de las curvas algebraicas. En ellas se puede notar la integración sistémica de dos formas de la noción de *negatividad* con dos conceptos diferentes de operatividad algebraica y aritmética con el objetivo de utilizar una única fórmula para el cálculo de cuadraturas. En el caso de Wallis la integración de la noción de negatividad "no tener" y el concepto de proporción da como resultado una aritmética de infinitos y en cuanto a Newton (cuya noción de negatividad es “estar del otro lado”) da como resultado una interpretación geométrica del signo negativo que surge con la operación formal de los números negativos.

Lo anterior reformula la pregunta básica, ¿qué es lo que permite construir conocimiento?, pues adquiere aquí un marco de referencia específico y la respuesta apunta hacia la conformación de un *escenario* centrado en una *práctica social*, que puede ser fomentada en la escuela, de integración sistémica de conocimientos matemáticos; en donde la convención matemática sería un consecuencia particular de tal práctica. Entonces, la conformación de tal escenario representa la posibilidad teórica de ser la que posibilite la construcción de otros conocimientos que adquieren su sentido en y para una organización sistémica de conjuntos de conocimientos. Nuestras indagaciones ulteriores apuntaran en tal dirección.

Finalmente, se señala que la caracterización aquí reportada está considerada como una *caracterización inicial*, en tanto que no posee todas las relaciones a las que está inmerso el proceso de construcción del conocimiento. Por ejemplo, en otro escrito mostraremos las propiedades emergentes del mecanismo, como aquellas relativas a las rupturas del discurso matemático escolar, cuando es transpuesto a sistemas de conocimientos organizados para su difusión y transmisión. La integración de los estudios parciales que realicemos concluirán este estudio socioepistemológico específico sobre construcción de conocimiento matemático.

Bibliografía

Baldor, A. (1983). *Álgebra*. México: Publicaciones Cultural.

Bourdon, M. (1848). *Élements d'Algèbre*. Bruselas: G. Stapleaux.

Bos, H.J.M. (1975). Differentials, Higher-Order Differentials and the derivative in the Leibnizian Calculus. *Arch. Hist. Exact. Sci.* 14, 1-90.

Cantoral, R. (1990).*Desequilibrio y equilibración. Categorías relativas a la apropiación de una base de significados propias del pensamiento físico para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las funciones analíticas*. Tesis de Doctorado, Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.

Cantoral, R. & Farfán, R. M. (1998) Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Épsilon, Revista de la S.A.E.M. "Thales"*. 42, 353-369.

Cajori, F. (1928). *A history of mathematics notations*. EEUU: The Open Court Publishing Company.

Cauchy, A-L. (1994). *Curso de análisis.* México: Colección Mathema-UNAM. Traducción de Carlos Alvarez de diversos originales de Cauchy publicados entre 1821 y 1823.

Chevallard, Y., (1997). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Argentina: Editorial Aique.

Confrey, J. & Dennis, D. (2000). La Creación de Exponentes Continuos: un estudio sobre los métodos y la epistemología de John Wallis. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 3*(1), 5-31.

Confrey, J. & Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics 26*, 135-164.

Confrey, J. & Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education 26*(1) 66-86.

Confrey, J. (1991). The concept of exponential functions: A student's perspective. En L.P. Steffe (Ed.) *Foundations of mathematical experience* (pp. 124-154). EEUU: Springer Verlag.

Contreras, M. M. (1880). *Tratado de Álgebra Elemental*. México: Imprenta de J. F. Jens.

Cordero, F. (1994). *Cognición de la integral y la construcción de sus significados. Un estudio del discurso matemático escolar*. Tesis doctoral, Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.

Dubinsky, E. (1992) The nature of the process of conception of function. En G. Harel & E. Dubinsky (Eds.) *The concept of function: Aspects on Epistemology and Pedagogy* (pp. 85-106). EEUU: MAA, Notes 25.

Euler, L. (1845). *Introduction a l'analyse infinitésimale.* París, Francia: L'Ecole Polytechnique (Trabajo original publicado en 1738).

Euler, L. (1984). *Elements of Algebra.* (Vollständige Anleitung zur Algebra Trad. de (1770) por John Hewlett). EEUU: Springer-Verlag.

Farfán, R. (1997). *Ingeniería Didáctica: Un estudio de la variación y el cambio*. México: Editorial Iberoamérica.

Ferrari, M. (2001). *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo*. Tesis de Maestría, Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.

Harel, G. & Dubinsky, E. (1992). *The concept of function: Aspects on Epistemology and Pedagogy*. EEUU: MAA, Notes 25.

Gallardo, A. (1993). La operatividad temprana del número negativo y el surgimiento de las soluciones negativas en la historia. En T. Rojano & L. Puig (Eds.), *Memorias del tercer simposio internacional sobre investigación en educación matemática. Historia de las ideas algebraicas. Valencia, España 1991.*(pp. 97-116). México: Departamento de la didáctica de la matemática Universitat de Valencia –PNFAMP-México.

Kalnin R. A. (1978). *Álgebra y funciones elementales*. Traducción del ruso por Akop Grdian. Ex-URSS: Editorial Mir.

Harel, G. & Dubinsky, E. (1992). *The concept of function: Aspects on Epistemology and Pedagogy*. EEUU: MAA, Notes 25.

Katz, V. J. (1987). The calculus of the trigonometric functions. *Historia Mathematica 14*, 311-324.

Lezama, J. (1999). *Un estudio de reproduciblidad: El caso de la función exponencial,* Tesis de Maestría, Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN. México.

L'Hospital, Marqués de (1998). *Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas*. México: Colección Mathema-UNAM. Traducción de Rodrigo Cambray del original *Analyse des infiniment petis pour l'intelligence des lignes curbes* (1696).

Martínez, G. (2000). *Hacia una explicación sistémica de los fenómenos didácticos. El caso de las convenciones en el tratamiento de los exponentes no naturales*. Tesis de Maestría. Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.

Martínez, G. (2002). Explicación sistémica de fenómenos didácticos ligados a las convenciones de los exponentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 5*(1) 45-78.

Meavilla, V. (1993). Una aproximación al "Libro primero de arithmetica algebratica" de Marco Aurel. En T. Rojano & L. Puig (Eds.), *Memorias del tercer simposio internacional sobre investigación en educación matemática. Historia de las ideas algebraicas. Valencia, España 1991.* (pp. 65-95). México: Departamento de la didáctica de la matemática Universitat de Valencia –PNFAMP-México.

Newton, I. (1669). De Analysi per equationes infinitas (june 1669). En D.T. Whiteside (1967) (Ed.), *The mathematical papers of Isaac Newton. Vol. II (1667-1700)* (pp. 206-247). Gran Bretaña: Cambridge University Press.

Paradís, J. (1993). La triparty en la Science des Nombres de Nicolas Cehuquet. En T. Rojano & L. Puig (Eds.), *Memorias del tercer simposio internacional sobre investigación en educación matemática. Historia de las ideas algebraicas. Valencia, España 1991.* (pp. 31-63). México: Departamento de la didáctica de la matemática Universitat de Valencia –PNFAMP-México.

Piaget, J. & Garcia, R. (1991). *Psicogénesis e historia de la ciencia*: México: Siglo XXI.

Rees, P. K., Sparks, F. W. & Sparks Rees C.(1982). *Álgebra contemporánea*. México: McGraw-Hill.

Rojano, T. & Sutherland, R. (1993). La sintaxis algebraica en el proyecto Vietico. En T. Rojano & L. Puig (Eds.), *Memorias del tercer simposio internacional sobre investigación en educación matemática. Historia de las ideas algebraicas. Valencia, España 1991.* (pp. 117-130). México: Departamento de la didáctica de la matemática Universitat de Valencia –PNFAMP-México.

Sfard, A. (1992) Operational origins oh mathamatical objects an the quandary of reification. The case of function. En G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects on Epistemology and Pedagogy* (pp. 59-84). EEUU: MAA, Notes 25.

Sierpinska, A. (1992) On the understanding the notion of function. En G. Harel & E. Dubinsky (Eds.) *The concept of function: Aspects on Epistemology and Pedagogy* (pp. 25-58). EEUU: MAA, Notes 25.

Struik, D. J. (1986). *A source book in mathematics 1200-1800*. EEUU: Princeton University Press.

Trujillo, R. (1995). *Problemática de la enseñanza de los logaritmos en el nivel medio superior. Un enfoque sistémico*. Tesis de Maestría, Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.

Wentworth, J & Smith, D. E.(1985). *Elementos de álgebra*. México: Editorial Porrúa.

Youschkevitech, A. P.(1976). The concept of function up to the middle of the 19th century. *Arch. Hist. Exact. Sci*. 16, 37-85.