# POTENCIALIDADES Y DIFICULTADES DE LA MODELIZACIÓN DE FENÓMENOS ALEATORIOS MEDIANTE SIMULACIÓN COMPUTACIONAL EN UN CURSO UNIVERSITARIO

Santiago Inzunsa Cazares
Universidad Autónoma de Sinaloa
sinzunza@uas.uasnet.mx

## RESUMEN

En el presente trabajo se presenta un análisis sobre la potencialidad que ofrece un ambiente de simulación en hoja de cálculo y las dificultades que enfrentan los estudiantes para formular modelos y simular fenómenos aleatorios discretos en un curso básico de probabilidad y estadística a nivel universitario. Los resultados indican que el proceso de modelización de un fenómeno aleatorio es un proceso complejo para muchos estudiantes, dado que requieren identificar claramente las componentes clave de un problema, las condiciones que se deben cumplir, identificar casos favorables y resumir los resultados para facilitar su interpretación. La idea de ver a la hoja de cálculo como una herramienta que permite introducir datos y calcular valores con determinadas fórmulas, al parecer tuvo una influencia en que los estudiantes en muchos casos no generaran los resultados mediante comandos aleatorios, ya que les parecía mas sencillo introducirlos de forma directa y realizar los cálculos utilizando la fórmula clásica de probabilidad; de esta manera utilizaban el potencial de cálculo de la hoja, más no su potencial de simulación. La simulación resultó ser una tarea novedosa y desafiante para los estudiantes, ya que requiere de diversas actividades de matematización para construir un modelo que sea funcional y genere resultados correctos. Se reconoce el potencial pedagógico de la simulación como complemento al enfoque clásico y axiomático formal de la probabilidad que aún prevalece en muchos cursos universitarios, sin embargo concluimos que para aprovechar el potencial de estas herramientas tecnológicas, se requiere una planeación didáctica cuidadosa de las diversas etapas del proceso de simulación y un conocimiento adecuado de la herramienta, para de esta manera lograr que los estudiantes desarrollen esquemas adecuados que les permitan comprender los conceptos probabilísticos en cuestión y que vean el proceso de simulación como un proceso holístico, coherente y confiable para resolver problemas de probabilidad e inferencia estadística.

PALABRAS CLAVE: Simulación, Probabilidad, Hoja de Cálculo, Ambiente Computacional.

## 1. EL PROBLEMA

La simulación computacional ha sido sugerida por diversos investigadores y organizaciones como una herramienta pedagógica para la enseñanza de la probabilidad y la estadística (Biehler, 1991; NCTM, 2000; Mills, 2002). Sin embargo diversos estudios en educación estadística (Pratt, 2005; Inzunsa, 2008; Maxara y Biehler, 2006; Lee y Mojica, 2008; Chaput, Girard y Henry, 2011) han mostrado que no obstante las ventajas que presenta la simulación al utilizar el enfoque frecuencial de la probabilidad, resulta un tema complejo para muchos estudiantes, incluso para profesores, ya que en el proceso de construir el modelo computacional se requieren poner en juego actividades de matematización con cierto nivel de abstracción y generalización. La complejidad anterior, esta ligada en cierta medida a la herramienta que se utiliza para la simulación, es decir, la naturaleza de la herramienta incide en la cognición del sujeto en tanto está dotada de potencialidades y limitaciones que le fueron conferidas en su diseño, pero a su vez está influenciada por los conocimientos y esquemas que desarrollan los estudiantes en el proceso de simulación en la medida que se avanza en el estudio de un tema.

La simulación computacional integra diversos aspectos que son importantes en la enseñanza de las matemáticas, y en particular, en la enseñanza de la probabilidad:

1. Requiere de una actividad de modelización matemática en la cual los estudiantes necesitan desarrollar ciertas competencias, tales como hacer supuestos para simplificar el problema, identificar y simbolizar variables y parámetros, formular el modelo tomando en cuenta los supuestos y las condiciones del problema, para finalmente resolverlo e interpretar la solución.
2. Cuando es posible una solución analítica del problema, se pueden contrastar los resultados experimentales generados por la simulación con los resultados teóricos. En casos donde no es posible una solución analítica o es demasiado compleja, la simulación constituye una herramienta de fundamental importancia.
3. Permite abordar problemas abstractos en términos más concretos, sobre todo cuando la simulación se realiza en ambientes computacionales provistos de diversas representaciones (gráficas, simbólicas, numéricas) ligadas entre sí, que hacen posible una visualización y retroalimentación de las diversas componentes del modelo.

Existen diversas propuestas para la formulación de un modelo de simulación en un ambiente computacional. Por ejemplo, Gnanadesikan, Scheaffer y Swift (1987), proponen un proceso muy completo y detallado que consta de ocho pasos, el cual se describe a continuación:

1. Establecer el problema claramente.
2. Definir las componentes clave.
3. Establecer los supuestos del problema.
4. Seleccionar el modelo para generar los resultados para una componente clave.
5. Realizar una prueba para un caso.
6. Registrar la observación de interés.
7. Repetir los pasos 5 y 6 un gran número de veces.
8. Resumir la información y extraer conclusiones.

Con base en lo anterior, es necesario realizar un profundo análisis sobre la pertinencia didáctica de la simulación, conocer su potencial y las dificultades en su implementación, para de esta manera, diseñar estrategias didácticas que permitan aprovechar su potencial en la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad y la estadística. En este sentido, en el presente trabajo nos hemos interesado en investigar desde una perspectiva instrumental acerca del potencial de la hoja de cálculo para la modelización de fenómenos aleatorios en un curso básico de probabilidad a nivel universitario, así como las dificultades que presentan los estudiantes en las diferentes etapas del proceso de modelización. En particular nos hemos planteado las siguientes preguntas de investigación: ¿cuáles son las potencialidades y restricciones que la hoja de cálculo ofrece para la simulación de fenómenos aleatorios?, ¿qué estrategias desarrollan los estudiantes y a que dificultades se enfrentan en el proceso de modelización.

## 2. MARCO TEÓRICO

En el desarrollo del presente trabajo hemos adoptando un enfoque instrumental de la cognición matemática (Guin y Trouche, 1999; Artigue, 2002). Las nociones más básicas del enfoque instrumental consisten en los significados de *artefacto* e *instrumento*. El artefacto es un objeto material o abstracto (por ejemplo, el lenguaje, una calculadora, una hoja de cálculo) que está disponible para que un sujeto realice cierto tipo de actividad; un instrumento por su parte, es un constructo personal que se puede desarrollar manipulando un artefacto de manera progresiva (en este caso la hoja de cálculo). De esta forma, un artefacto no se constituye inmediatamente en herramienta para un sujeto, llega a serlo cuando el sujeto logra apropiarse del artefacto, estableciendo relaciones significativas para un tipo específico de tarea –en nuestro caso una tarea matemática-; es decir, cuando ha podido subordinarlo como un medio para sus fines y lo ha integrado a su actividad (Verillón y Rabardel, 2005). El proceso que permite convertir a un artefacto en instrumento se denomina *génesis instrumental*.

En el proceso de génesis instrumental, el usuario desarrolla esquemas mentales para tareas específicas, en tales esquemas, el conocimiento técnico (habilidades para usar el artefacto) y el conocimiento sobre el dominio específico del contenido matemático se entrelazan o complementan (Drijvers y Trouche, 2008). Es decir, un instrumento es una entidad mixta constituida por una parte de un artefacto y otra parte de los esquemas personales que los usuarios desarrollan al realizar tareas especificas. En el caso de una tarea matemática, un esquema mental involucra la estrategia global de solución, los medios técnicos que el artefacto ofrece y los conceptos matemáticos que subyacen a la estrategia.

Para ejemplificar en el contexto de la enseñanza de la probabilidad, cuando los estudiantes utilizan una herramienta como la hoja de cálculo, trabajan con representaciones de objetos matemáticos tales como generadores de números aleatorios, un simbolismo para modelarlos (comandos o funciones) que requieren de sintaxis en sus valores de entrada o parámetros, diferentes tipos gráficas para representar los resultados y medidas estadísticas para describir su comportamiento y resumir los resultados (por ejemplo, frecuencias de eventos favorables). A través de su trabajo e interacción, los estudiantes pueden gradualmente desarrollar la hoja de cálculo como una fuente de aprendizaje, de tal forma que la hoja de cálculo puede llegar a ser un instrumento en cierto nivel para cada estudiante a través de su uso.

## 3. METODOLOGÍA

El estudio con la hoja de cálculo se realizó con un grupo de 20 estudiantes de tercer semestre de la carrera de Informática en la Universidad Autónoma de Sinaloa en la primera parte del ciclo escolar 2011-2012 mientras tomaban un curso básico de probabilidad y estadística, en el cual se hizo énfasis en la simulación a la par que se abordaban los diferentes temas del curso desde una perspectiva teórica. Los estudiantes no fueron entrenados en un curso previo sobre el uso de Excel para la simulación y se partió del conocimiento básico que ellos tenían de la hoja de cálculo. Sus conocimientos de programación al momento de la investigación se consideran aún regulares, en tanto habían tomado un curso de algoritmia y otro de programación básica previamente al curso de probabilidad y estadística. En clase se abordaban ejemplos sencillos de simulación y de cada tema se dejaba una actividad como tarea para complementarlo y contrastar los resultados teóricos. Los temas que se abordan en el presente trabajo regla de la adición de probabilidades, regla del producto de probabilidades, probabilidad total y distribuciones de probabilidad.

## 4. RESULTADOS

### 4.1 POTENCIALIDADES DE LA HOJA DE CÁLCULO EXCEL PARA LA SIMULACIÓN DE FENÓMENOS ALEATORIOS

La hoja de cálculo Excel posee diversas potencialidades en los aspectos representacional, de cálculo y de comunicación, las cuales son importantes en educación matemática, no obstante que su diseño tiene como propósito el procesamiento de información de tipo financiero y administrativa. En el aspecto de comunicación de una hoja de cálculo, los usuarios introducen información en un lenguaje aritmético-algebraico interactivo que requiere de una sintaxis rigurosa. En el aspecto representacional, la hoja de cálculo dispone de múltiples representaciones que permite que varios registros semióticos puedan ser presentados en forma simultánea sobre la pantalla, tal es el caso del registro de fórmulas para expresar relaciones entre celdas, el registro numérico para representar datos o resultados de los cálculos, el registro gráfico que permite al usuario construir varios tipos de representaciones gráficas dinámicamente ligadas a datos numéricos. En el aspecto de cálculo, la hoja de calculo (Excel) dispone de una amplia gama de fórmulas que permiten formular modelos, generar datos y realizar cálculos. Una propiedad de suma importancia que tiene que ve con la interactividad, es la retroalimentación inmediata obtenida cuando se trabaja con una fórmula presionando la tecla F9, lo cual permite a los estudiantes experimentar, conjeturar y ayudarlos a encontrar errores.

En el caso específico de la simulación de fenómenos aleatorios, la hoja de cálculo Excel dispone de diversos comandos para generar números pseudoaleatorios. Para el caso de fenómenos aleatorios que son simulables mediante modelos de urna –caso que nos ocupa en nuestro trabajo-, Excel dispone de dos comandos que generan números provenientes de una distribución uniforme: *aleatorio()* y *aleatorio.entre(inf,sup)*. El comando *aleatorio()* devuelve un número aleatorio mayor que 0 y menor que 1, mientras que el comando *aleatorio.entre(inf,sup)* devuelve un número aleatorio entero entre los límites que se especifican, como se muestra en las siguientes figuras:

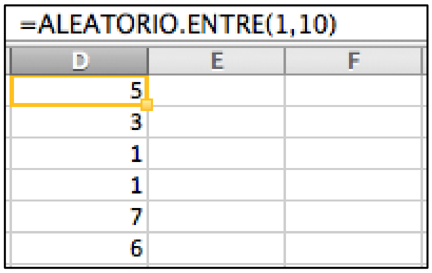


Fig. 1: Comando aleatorio.entre(inf,sup)

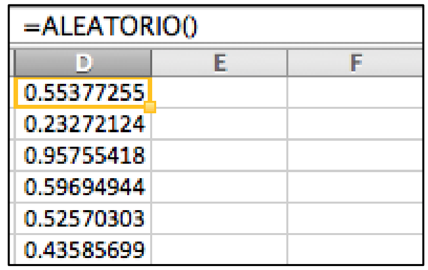


Fig. 2: Comando aleatorio()

Los números pseudoaleatorios generados mediante la función *aleatorio()* o *aleatorio.entre(inf,sup)* tienen dos propiedades que los hacen equiparables a números completamente aleatorios:

1. Cualquier número entre 0 y 1 tiene la misma probabilidad de ser generado.
2. Los números generados son independientes unos de otros.

### 4.2. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE LAS ACTIVIDADES DE SIMULACIÓN

Del análisis de la actividad matemática realizada por los estudiantes para desarrollar el proceso de simulación con la hoja de cálculo en todas las actividades, identificamos tres etapas importantes, con conceptos y características propias que requieren diferentes actividades de matematización por parte de los estudiantes:

1. Producir los resultados mediante comandos basados en generadores de números aleatorios.
2. Realizar operaciones (aritméticas, lógicas, condicionales, etc.) para cumplir con las condiciones del problema.
3. Identificar los resultados favorables para calcular su frecuencia relativa.

A continuación describiremos algunos resultados importantes de las diversas actividades que se implementaron en el estudio:

*Actividad 1:*
*Simular en Excel el lanzamiento de dos dados.*

*a) Sumar los puntos de las caras que resultan y determinar la probabilidad que la suma sea 7.*
*b) Restar los puntos de las caras y determinar la probabilidad que la diferencia de puntos sea 3.*
*c) Multiplicar los puntos de las caras y calcular la probabilidad que el producto sea mayor.*

Esta actividad introductoria tenía el propósito de inducir a los estudiantes al ambiente de simulación con la hoja de cálculo para ver qué fórmulas utilizaban y la dificultad a la que se enfrentaban para formular el modelo que cumpliera con las condiciones del problema. De acuerdo a la perspectiva teórica utilizada, esta actividad representó el punto de partida para el análisis de la instrumentación desarrollada por los estudiantes sobre la hoja de cálculo. No obstante el nivel básico de la actividad se observaron diversas dificultades por parte de los estudiantes en cada una de las etapas para construir un modelo en la hoja de cálculo. El uso de comandos apropiados para la generación del modelo, para el cumplimiento de condiciones del problema y la identificación de resultados favorables fue la parte que mayores dificultades les representó, tanto en esta como en el resto de las actividades.

Como ejemplo de lo anterior mostramos el trabajo desarrollado por dos estudiantes en la parte de cumplir condiciones del problema. En el caso de Luis identificó y acumuló los casos favorables (suma de puntos igual a 7) a la vez en la misma columna (columna de frecuencia), lo que requiere introducir una fórmula recursiva a partir del segundo renglón (ver Figura 3). Los estudiantes que siguieron este mismo esquema cometieron diversos errores por las dificultades que les representaba la recursividad. Otra esquema más sencillo es el que utilizó Silvia (ver Figura 4), quien identificó los casos favorables mediante un 1 (columna frecuencia) y al final realizó el conteo de casos favorables mediante una suma en una celda determinada de la hoja, evitando así la recursividad. Una situación similar se presentó en los otros dos incisos que requerían la resta y multiplicación de los puntos de la caras de los dados.

E3 =SI(D3=7,1,0)+E2

| LANZAMIENTOS | DADO 1 | DADO 2 | SUMA | FRECUENCIA |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 5 | 6 | 0 |
| 2 | 2 | 5 | 7 | 1 |
| 3 | 3 | 4 | 7 | 2 |
| 4 | 6 | 5 | 11 | 2 |
| 5 | 4 | 6 | 10 | 2 |

Fig. 3: Caso de Luis

=SI(E3=7, 1, 0)

| Lanzamientos | Dado 1 | Dado 2 | Suma | Frecuencia |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 4 | 9 | 0 |
| 2 | 4 | 2 | 6 | 0 |
| 3 | 3 | 2 | 5 | 0 |
| 4 | 2 | 6 | 8 | 0 |
| 5 | 4 | 3 | 7 | 1 |
| 6 | 6 | 1 | 7 | 1 |
| 7 | 3 | 5 | 8 | 0 |
| 8 | 3 | 5 | 8 | 0 |
| 9 | 2 | 3 | 5 | 0 |
| 10 | 5 | 2 | 7 | 1 |

Fig. 4: Caso de Silvia

*Actividad 2:*
*Si un amigo tuyo piensa un número del 1 al 100 ¿Cuál es la posibilidad que el número sea divisible por 6 o por 10?*

Esta actividad requiere de la aplicación de la regla de la suma de probabilidades, esto es, $P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, en la cual $A$ es el evento que representa a los números divisibles por 6, $B$ es el evento que representa a los números divisibles por 10 y $P(A \cap B)$ es el evento que representa a los números divisibles por 6 y por 10. El propósito era ver el proceso de instrumentación de los estudiantes para plantear el modelo correspondiente para su simulación.

En esta actividad resultó de mayor complicación que la actividad introductoria. La componente clave es el número pensado. Se hace el supuesto que cualquier número entero entre 1 y 100 tiene la misma probabilidad de ocurrir, por lo que un resultado de la componente clave se obtiene generando números aleatorios entre 1 y 100. Sin embargo, muchos estudiantes no generaron los resultados con alguna de las fórmulas generadoras de números aleatorios; en cambio generaron los resultados manualmente y calcularon frecuencias a través del modelo cásico de probabilidad, es decir dividiendo los casos favorables entre el total de resultados posibles. Estos alumnos utilizaron el potencial de cálculo de la hoja, pero no simularon el fenómeno en cuestión. Un ejemplo de ello es el trabajo de Ana, que se muestra a continuación:

F12 =F3+F6-F9

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | |
| 2 | Espacio Muestral | Divisible 6 | Divisble 10 | AUB | | Probabilidad de que sea divisible entre 6 |
| 3 | 1 | 6 | 10 | 30 | | 0.16 |
| 4 | 2 | 12 | 20 | 60 | | |
| 5 | 3 | 18 | 30 | 90 | | Probabilidad de que sea divisible entre 10 |
| 6 | 4 | 24 | 40 | Total | | 0.1 |
| 7 | 5 | 30 | 50 | 3 | | |
| 8 | 6 | 36 | 60 | | | Probabilidad de que sea divisible entre 6 & 10 |
| 9 | 7 | 42 | 70 | | | 0.03 |
| 10 | 8 | 48 | 80 | | | |
| 11 | 9 | 54 | 90 | | | Probablidad de que sea divisible entre 6 o 10 |
| 12 | 10 | 60 | 100 | | | 0.23 |
| 13 | 11 | 66 | Total | | | |
| 14 | 12 | 72 | 10 | | | |
| 15 | 13 | 78 | | | | |
| 16 | 14 | 84 | | | | |
| 17 | 15 | 90 | | | | |
| 18 | 16 | 96 | | | | |
| 19 | 17 | Total | | | | |
| 20 | 18 | 16 | | | | |

Fig. 5: Trabajo realizado por Ana

Algunos alumnos si utilizaron generadores de números aleatorios para generar los resultados, como fue el caso de José, cuyo trabajo se muestra a continuación:

=F2/1000

| B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Numero | Divisible 6 | Total Divisible | Divisible 10 | Total Divisible | Interseccion | Probabilidad |
| 5 | 0 | 175 | 0 | 117 | 33 | |
| 82 | 0 | 0.175 | 0 | 0.117 | 0.033 | 0.259 |
| 52 | 0 | | 0 | | | |
| 50 | 0 | | 1 | | | |
| 1 | 0 | | 0 | | | |

Fig. 6: Simulación realizada por José

En el caso de los alumnos que generaron aleatoriamente los resultados (por ejemplo el caso de José) identificaron los casos favorables mediante la fórmula *residuo(número,número_divisor)* combinada con la formula condicional *si(prueba lógica,valor_si_verdadero,valor_si_falso)*, lo cual no les generó dificultades dados sus conocimientos de programación; posteriormente cuando observaron que se producían resultados correctos realizaron el copiado de la fórmula para muchos casos. Esto fue parte del esquema que los estudiantes mostraron en el resto de las actividades. Sin duda este es un aspecto importante del ambiente computacional de una hoja de cálculo, dado que permite a los estudiantes, una vez generada una fórmula, observar si los resultados son correctos; en caso de no serlo, continúan con la búsqueda del error. Esta retroalimentación inmediata permite a los estudiantes desarrollar capacidades metacognitivas de monitoreo de su proceso de solución. Los resultados favorables de las componentes clave los contabilizaron mediante fórmulas como *contar.si(rango,criterio) y contar.si.conjunto(rango,criterio1,rango,criterio2,..).*

*Actividad 3:*

*Se tienen 3 urnas con bolas blancas y negras (Urna 1: 3 blancas y 2 negras. Urna 2: 1 blanca y 3 negras. Urna 3: 6 blancas y 2 negras). Se selecciona una bola de la urna. ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca? Se asume que es igualmente probable seleccionar cualquier urna.*

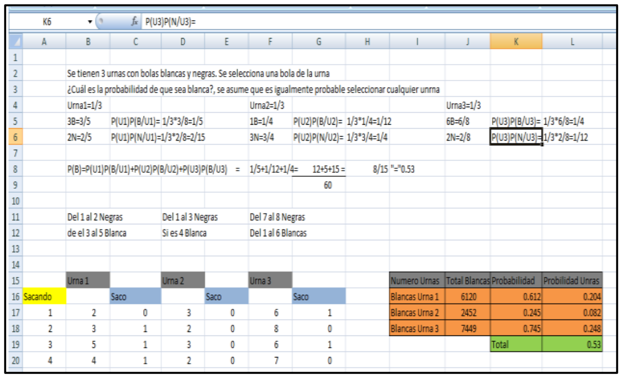
El propósito de esta actividad era formular un modelo de simulación para el cálculo de la probabilidad total de un evento; esto es $P(B)=P(U1)P(B/U1)+P(U2)P(B/U2)+P(U3)P(B/U3)$, donde U1, U2 y U3 son eventos Urna 1, Urna 2 y Urna 3 respectivamente, y B es el evento que representa a que la bola seleccionada sea blanca. Construir el modelo requiere identificar dos etapas; la primera consistente en seleccionar la urna al azar, y la segunda, seleccionar la bola de la urna seleccionada. En esta actividad las componentes clave son la selección de una urna (urna 1, urna 2 o urna 3) seguida de la selección de una bola (blanca o negra). Los supuestos consisten en que cada urna tiene la misma probabilidad de ser seleccionada y la selección de las bolas que contiene cada urna también es equiprobable. De nueva cuenta se observó la dificultad para identificar las componentes clave por la mayoría de los estudiantes, algunos identificaron la selección de las bolas (segunda parte) pero omitieron la selección de la urna.

La Figura 6 muestra el trabajo realizado por Ángel un estudiante que resolvió del problema de dos formas. En la primer parte utilizó el potencial de cálculo de la hoja y realizó los cálculos en forma manual siguiendo la fórmula de la probabilidad total, posteriormente en la segunda parte simuló la extracción de las bolas y calculó las frecuencias para 10,000 casos de manera correcta. Los resultados de ambos enfoques coinciden lo que le da seguridad que su problema está resuelto correctamente. Este fue el problema donde se observó el mayor número de casos donde se resolvió el problema mediante el enfoque clásico como se hace en un ambiente de lápiz y papel, pero utilizando algunas fórmulas de Excel.

*Actividad 4:*

*Es posible que una computadora reciba una señal errónea que no se muestra como error en la pantalla, la cual se le denomina error de paginación silencioso. Una terminal específica está defectuosa de modo que al usar el procesador de textos introduce un error de este tipo probabilidad igual a 0.10. El procesador de textos se usa 20 veces durante una cierta semana.*

*a) Identificar la variable aleatoria de interés*
*b) Calcular la probabilidad de que no haya un error de paginación silencioso*
*c) Construir la distribución de probabilidad completa.*



K6 | P(U3)P(N/U3)=

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | Se tienen 3 urnas con bolas blancas y negras. Se selecciona una bola de la urna | | | | | | | | | | |
| 3 | | ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca?, se asume que es igualmente probable seleccionar cualquier unrna | | | | | | | | | | |
| 4 | | Urna1=1/3 | | | | Urna2=1/3 | | | | Urna3=1/3 | | |
| 5 | | 3B=3/5 | P(U1)P(B/U1)= | 1/3*3/8=1/5 | | 1B=1/4 | P(U2)P(B/U2)= | 1/3*1/4=1/12 | | 6B=6/8 | P(U3)P(B/U3)= | 1/3*6/8=1/4 |
| 6 | | 2N=2/5 | P(U1)P(N/U1)=1/3*2/8=2/15 | | | 3N=3/4 | P(U2)P(N/U2)= | 1/3*3/4=1/4 | | 2N=2/8 | P(U3)P(N/U3)= | 1/3*2/8=1/12 |
| 7 | | | | | | | | | | | | |
| 8 | | P(B)=P(U1)P(B/U1)+P(U2)P(B/U2)+P(U3)P(B/U3) | | | = | 1/5+1/12+1/4= | 12+5+15 = | 8/15 | "="0.53 | | | |
| 9 | | | | | | | 60 | | | | | |
| 10 | | | | | | | | | | | | |
| 11 | | Del 1 al 2 Negras | | Del 1 al 3 Negras | | Del 7 al 8 Negras | | | | | | |
| 12 | | de el 3 al 5 Blanca | | Si es 4 Blanca | | Del 1 al 6 Blancas | | | | | | |
| 13 | | | | | | | | | | | | |
| 14 | | | | | | | | | | | | |
| 15 | | Urna 1 | | Urna 2 | | Urna 3 | | | Numero Urnas | Total Blancas | Probabilidad | Probilidad Unras |
| 16 | Sacando | | Saco | | Saco | | Saco | | Blancas Urna 1 | 6120 | 0.612 | 0.204 |
| 17 | 1 | 2 | 0 | 3 | 0 | 6 | 1 | | Blancas Urna 2 | 2452 | 0.245 | 0.082 |
| 18 | 2 | 3 | 1 | 2 | 0 | 8 | 0 | | Blancas Urna 3 | 7449 | 0.745 | 0.248 |
| 19 | 3 | 5 | 1 | 3 | 0 | 6 | 1 | | | | Total | 0.53 |
| 20 | 4 | 4 | 1 | 2 | 0 | 7 | 0 | | | | | |

Fig. 7: Trabajo realizado por Ángel

La actividad 4 resultó sencilla para todos los estudiantes, aunque con algunas dificultades en la identificación correcta la variable aleatoria por parte de algunos estudiantes que la denotaban en forma genérica mediante una X pero realizaron los cálculos correctamente en la mayoría de los casos. Un problema de distribuciones de probabilidad se facilita en la hoja de cálculo ya que es posible construir una tabla con todos los valores de la variable aleatoria y sus respectivas probabilidades, es decir, la distribución de probabilidad en forma tabular. La hoja de cálculo dispone del comando *distr.binom(x,n,p,)* que permite calcular las probabilidad para cada valor indicado de la variable aleatoria mediante la función de copiado (ver Figura 8).

| X | P(X) |
|---|---|
| 0 | 0.121576655 |
| 1 | 0.270170344 |
| 2 | 0.285179807 |
| 3 | 0.190119871 |
| 4 | 0.089778828 |
| 5 | 0.031921361 |
| 6 | 0.008867045 |
| 7 | 0.001970454 |
| 8 | 0.000355776 |
| 9 | 5.27076E-05 |
| 10 | 6.44204E-06 |
| 11 | 6.50711E-07 |
| 12 | 5.4226E-08 |
| 13 | 3.70776E-09 |
| 14 | 2.05987E-10 |
| 15 | 9.15496E-12 |
| 16 | 3.1788E-13 |
| 17 | 8.3106E-15 |
| 18 | 1.539E-16 |
| 19 | 1.8E-18 |
| 20 | 1E-20 |
| Total Suma | 1 |

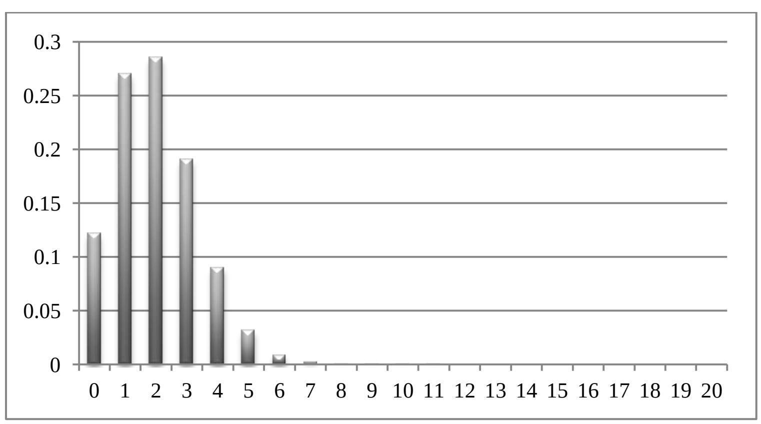


Fig. 8: Trabajo realizado por Mayté

Es importante resaltar que en el caso de las distribuciones de probabilidad, el uso tradicional de tablas de probabilidad es un trabajo tedioso y causa frecuente de errores en los estudiantes, sobre todo cuando se trata de calcular intervalos o colas que no son acumulativas en las tablas. Sin embargo, con el uso de la hoja de cálculo es posible calcular las distribuciones completas utilizando la función de copiado e incluso construir su gráfica. De esta forma, es posible ver qué valores son los más o menos probables.

## 1. CONCLUSIONES

Los resultados del presente trabajo -no obstante su carácter exploratorio- muestran que la hoja de cálculo tiene potencialidades que hacen posible que estudiantes universitarios desarrollen un proceso de instrumentación adecuado para resolver problemas de probabilidad mediante el método de simulación. Los recursos de la hoja de cálculo, como son las diversas representaciones simbólicas para formular modelos, identificar resultados favorables y calcular frecuencias; la interactividad en la comunicación entre usuario que permite una visualización inmediata de los resultados para retroalimentar y monitorear el proceso de solución, así como su capacidad de cálculo, constituyen elementos importantes que los estudiantes pueden manipular para convertir la hoja de cálculo en una herramienta para resolver problemas de probabilidad desde una perspectiva frecuencial.

Sin embargo, el proceso de instrumentación de la hoja de cálculo para simular fenómenos aleatorios no estuvo exento de dificultades, no obstante que los estudiantes disponían de algunos conocimientos de algoritmia que les pudieron ser de utilidad en la construcción de modelo y su ejecución. Una de las principales dificultades que identificamos en los estudiantes tienen que ver con una concepción de la hoja de calculo que se deriva del uso que hasta ese momento le habían dado: la hoja de cálculo como una herramienta que les permite la captura y procesamiento de información de tipo administrativo y financiero. De esta manera, se explica la estrategia utilizada por muchos estudiantes de capturar información en forma directa para posteriormente realizar cálculos mediante la fórmula clásica de probabilidad, en lugar de utilizar generadores de números aleatorios. De esa manera, la simulación como método de solución de problemas de probabilidad les resultó desafiante, en tanto requiere del uso de diversas representaciones simbólicas para matematizar las relaciones entre las variables y parámetros, por lo que les resultaba más fácil recurrir al enfoque clásico que ellos habían trabajado en sus estudios previos.

El presente estudio nos revela que el proceso de convertir un artefacto tecnológico en instrumento para la simulación no se constituye de manera inmediata, lo que nos conduce a pensar que es necesaria una planeación didáctica cuidadosa para presentar a los estudiantes el método de simulación como una alternativa confiable para resolver problemas de probabilidad, a su vez es importante un adecuado conocimiento de los aspectos técnicos de la herramienta para que los estudiantes pueden integrarla a sus fines de forma progresiva conforme avanzan en la solución de los problemas.

## 6. REFERENCIAS

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(3), 245-274.

Biehler, R. (1991). Computers in probability education. En R. Kapadia y M. Borovcnik (Eds.). *Chance Encounters: probability in education. A review of research and pedagogical perspectives*, (pp. 169-212). Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Chaput, B., Girard, J. y Henry, M. (2011). Frequentist Approach: Modeling and Simulation in Statistics and Probability Teaching. En C. Batanero, G. Burril & Ch. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for* Teaching and Teacher Education: A Joint ICMI/IASE Study. The 18th ICMI Study, (pp. 85-95). Springer Science+Business Media.

Drijvers, P. y Trouche, L. (2008). From artifacts to instruments. A theoretical framework behind the orchestra metaphor. En G. Blume & K. Heid (Eds.), *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics: Vol. 2. Cases and Persectives* (pp. 363-391).

Guin, D. y Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments. The case of calculators. *The International Journal of Computers for Mathematical Learning. 3*(3), 195-197.

Gnanadesikan, Scheaffer & Swift (1987). *The Art and Techniques of Simulation.* Quantitative Literacy Series. Dale Seymour Publications.

Inzunsa, S. (2008). Probability calculus and connections between theoretical and empirical distributions through computer simulations. *Proceedings of the 11th International Congress on Mathematical Education.* Monterrey México. Recuperable en http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.php?show=icme11

Lee y Mojica, (2008). Examining how teachers´ practices support statistical investigations. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading & A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference.*

Maxara, C. y Biehler, R. (2006). Students' Probabilistic Simulation and Modeling Competence after a Computer-Intensive Elementary Course in Statistics and Probability. *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*, Salvador Bahía. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute. Recuperado en 12/28/2011. www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.php

Mills, J. (2002). Using Computer Simulation Methods to Teach Statistics: A Review of the Literature. *Journal of Statistics Education*, 10(1). Recuperable en: http://www.amstat.org/publications/jse/v10n1/mills.html

NCTM (2000). Principles and Standards of School Mathematics. National Council of Teachers of Mathematics. Reston VA.

Pratt, D. (2005). How do teachers foster students understanding of probability? En G. Jones (Ed.), Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning (pp. 171-190). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Verillon, P. y Rabardel, P. (1995). Cognition and Artifacts: A Contribution to the Study of Though in Relation to Instrumented Activity. *European Journal of Psychology of Education*, *10(1)*, 77-101.