

¿Por qué demostrar en la Geometría Dinámica?

Michael de Villiers

Traducción al español, realizada por el Club de Matemáticas del CECyT Wilfrido Massieu del artículo:

Why Proof in Dynamic Geometry?

Slightly Edited Version of invited letter in a special Forum in **Mathematics in College**, 40-41, June 1996. Copyright Instructional Resource Center, CUNY.

Antes de comenzar a discutir la pregunta del título, quizás sea importante plantearse las preguntas siguientes:

- (1) ¿Qué **funciones** tiene la demostración dentro de las Matemáticas mismas?
- (2) ¿Cómo se pueden utilizar estas funciones en el salón de clases para hacer de la demostración una actividad más significativa?

Aunque sin afirmar completitud ni unicidad, me ha resultado útil el modelo siguiente para las funciones de la demostración en mi pensamiento e investigación sobre el tema en los años recientes. Ahora presentaré (sin un orden específico de importancia) el modelo y lo discutiré a continuación:

- verificación (referida a la **verdad** de un enunciado)
- explicación (proporciona comprensión o discernimiento de **por qué** es verdadero)
- descubrimiento (el descubrimiento o invención de resultados **nuevos**)
- sistematización (la **organización** de varios resultados en un sistema deductivo de axiomas, conceptos y teoremas principales)
- reto intelectual (la **auto-realización/plenitud** derivada de la construcción de una demostración)
- comunicación (la **negociación del significado** y la **transmisión** del conocimiento matemático)

Tradicionalmente desde un punto de vista lógico estricto la demostración se ha considerado casi exclusivamente en términos de su función de verificación, es decir verificando la corrección de los enunciados matemáticos. La idea predominante ha sido que la demostración se usa para quitar las dudas (personales o las de escépticos externos) y ha influido fuertemente en la práctica docente y en la mayoría de las discusiones e investigaciones sobre la enseñanza de la demostración.

Mi sentir personal es que esta visión es terriblemente parcial y creo que en muchos casos la función de verificación es menos importante que alguna de las otras funciones. Mi incomodidad con esta visión se intensifica aun más por el potencial de los paquetes computacionales para verificar actualmente (demostrar) resultados matemáticos en áreas diferentes. Un ejemplo de esto es el poder de convencimiento de los programas de geometría dinámica como *Sketchpad (Geómetra)* o *Cabri*. Mi temor es que si persistimos tercamente en esta visión parcial, bien podemos comenzar a prepararnos para la “*muerte*” de la demostración como lo predijo Horgan en un artículo [1].

Quizás aun más fundamentalmente, estoy en desacuerdo con el punto de vista de que la demostración es un requisito absoluto para el convencimiento. Al contrario, a partir de alguna experiencia personal y de la de algunos reconocidos matemáticos, alguna forma de convencimiento *a priori* es probablemente más frecuentemente un pre-requisito para el descubrimiento de una demostración que al revés. Por ejemplo, recientemente hice unos pocos descubrimientos originales mediante la exploración y verificación en *Sketchpad (Geómetra)* y *Cabri* (En un caso, dos generalizaciones duales del teorema de Van Aubel – [2]). A pesar de este convencimiento *a priori*, aún tuve necesidad de demostrarlos

deductivamente, no porque dudara de su validez sino porque quería tratar de comprender *por qué* eran verdaderos. (¡En algunos casos tal comprensión permite ulteriores generalizaciones que no se descubrirían fácilmente de manera experimental! Por ejemplo, ver [3]).

Además, demostrar algo que uno descubrió (y confirmó) experimentalmente es un reto intelectual, no realmente un ejercicio epistemológico de establecimiento de su “verdad”. Para parafrasear el famoso comentario de George Leigh-Mallory sobre su razón para intentar escalar el Monte Everest: “*Demostramos nuestros resultados porque estaban ahí*”. (Desafortunadamente, estos intentos no siempre resultan exitosos como lo testimonia la desaparición de Mallory e Irvine en 1924 cuando se acercaban a la cumbre y la conquista tuvo que esperar hasta 1954 cuando Hillary and Tenzing alcanzaron la cima. De manera parecida, las conjeturas matemáticas a menudo sólo son demostradas por las generaciones siguientes).

En un artículo reciente, el geómetra Branko Grunbaum [5] usó el programa computacional **Mathematica** para explorar y verificar algunos resultados geométricos y sus comentarios son muy pertinentes para este artículo: “*¿Empezamos confiando en la evidencia numérica (u otra evidencia producida por las computadoras) como demostraciones de los teoremas matemáticos ... si no tenemos duda - ¿lo llamamos un teorema? ... Pienso que mis afirmaciones son teoremas ... la comunidad matemática necesita enfrentarse con modos de investigación nuevos que han sido abiertos por las computadoras*”.

Creo que le debemos a nuestros estudiantes el ser honestos intelectualmente al discutir las diversas funciones de la demostración (particularmente la de explicación – ver [4]) y no simplemente tratar de decirles que nosotros como matemáticos sólo demostramos cosas “*para estar seguros*”. Aparte de eso, mi experiencia con los estudiantes parece indicar que en verdad perciben la demostración como una actividad mucho más significativa.

References

1. J. Horgan, *The Death of Proof*, Scientific American, Oct (1993), 74-82.
2. M. de Villiers. *Dual generalizations of Van Aubel's theorem*. (1998). Mathematical Gazette, Nov, 405-412. (In relation to these & further generalizations of Van Aubel, also see:
<http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/aubel.pdf>
<http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/spzips.htm>)
3. M. de Villiers. *The Role of Proof in Investigative, Computer-based Geometry: Some personal reflections*. Chapter in Schattschneider, D. & King, J. (1997). *Geometry Turned On!* Washington: MAA.
http://forum.swarthmore.edu/dynamic/geometry_turned_on
- M. de Villiers. *Rethinking Proof with Sketchpad*. (1999). Key Curriculum Press, USA.
<http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/homepage2.html>)
5. Grunbaum, B. (1993). *Quadrangles, pentagons, and computers*. Geombinatorics, No. 3, 4-9.

Michael de Villiers

Mathematics Education

University of Durban-Westville

4000 Durban, South Africa

profmd@mweb.co.za <http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/homepage.html>